

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES SUR LA SIGNATURE D'UNE PERMUTATION
Autor: Cartier, P.
Kapitel: 5. Autres méthodes.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43848>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

couples qui appartiennent à o' , mais non à o ; on pose $d(o, o') = (-1)^m$. Le formulaire suivant s'établit par des raisonnements élémentaires ⁽²⁾

$$(11) \quad d(o, o) = 1$$

$$(12) \quad d(o, o') = d(o', o)$$

$$(13) \quad d(o, o') d(o', o'') = d(o, o'')$$

$$(14) \quad d(so, so') = d(o, o').$$

On peut alors prouver que $d(o, so)$ est indépendant de l'orientation o choisie; en effet, si o et o' sont deux orientations, on a

$$\begin{aligned} d(o', so') &= d(o', o) d(o, so) d(so, so') && \text{d'après (13)} \\ &= d(o, o') d(o, so) d(o, o') && \text{d'après (12) et (14)} \\ &= d(o, so) && \text{car } d(o, o')^2 = 1. \end{aligned}$$

A toute permutation s de X , on fait correspondre alors le nombre $\alpha(s)$ qui est égal à $d(o, so)$ pour toute orientation o . Si s et t sont deux permutations, on a

$$\alpha(st) = d(o, sto) = d(o, to) d(to, s(to)) = \alpha(t) \alpha(s).$$

Pour calculer $\alpha(s_{ab})$, nous choisissons une orientation o convenable; on oriente l'arc ab de a vers b , chaque arc ax de a vers x , chaque arc bx de b vers x et les autres arcs de manière arbitraire. Le seul effet de la transposition s_{ab} est de changer l'orientation de l'arc ab , d'où $\alpha(s_{ab}) = -1$.

On peut donc définir la signature de s comme le nombre $\alpha(s)$. Supposons en particulier que X soit l'ensemble des entiers $1, 2, \dots, n$ et prenons pour o l'ensemble des couples (i, j) avec $i < j$; alors so se compose des couples de la forme $(s(i), s(j))$ avec $i < j$; les éléments de so qui n'appartiennent pas à o sont donc les couples $(s(i), s(j))$ avec $i < j$ et $s(i) > s(j)$ et leur nombre est égal à $N(s)$. On retrouve donc la définition de la signature comme égale à $(-1)^{N(s)}$.

5. Autres méthodes.

On peut aussi utiliser les *cycles* d'une permutation pour définir sa signature ([6], chap. 8). Soit $c(s)$ le nombre de cycles de la permutation s de rang n ; les définitions usuelles de la signature permettent de prouver qu'elle

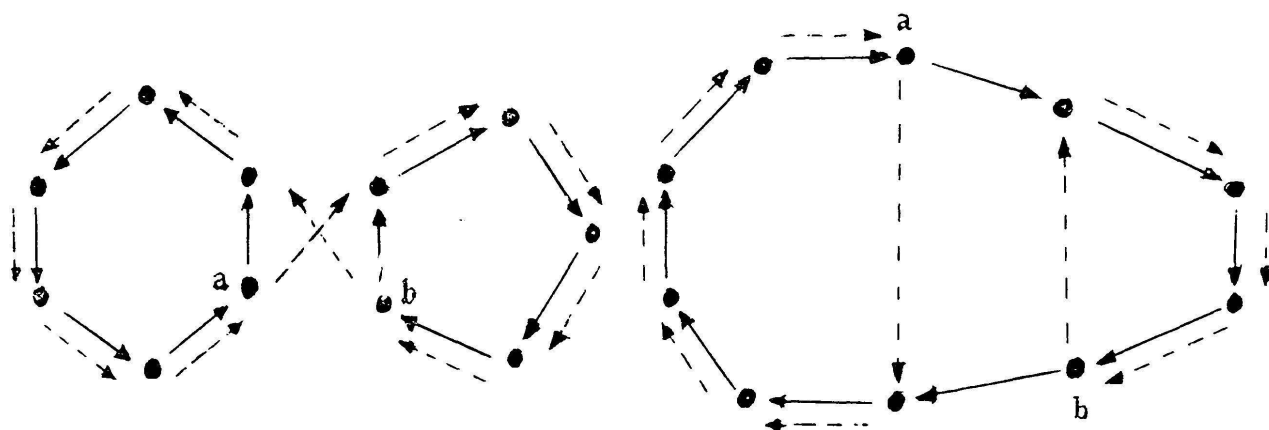
²⁾ On pourra consulter la note [4] pour des considérations plus générales.

est égale à $z(s) = (-1)^{n+c(s)}$. Si l'on veut définir la signature de s par le nombre $z(s)$, il faut établir *a priori* la relation

$$(15) \quad c(ss_{ab}) = c(s) \pm 1.$$

En effet, cette relation entraîne $z(ss_{ab}) = -z(s)$; mais on a $c(\varepsilon) = n$, d'où $z(\varepsilon) = 1$ et il est alors immédiat que $z(s)$ est égal à 1 ou à -1 selon que s est paire ou impaire.

Pour établir la formule (15), il faut distinguer deux cas. Si a et b appartiennent à deux cycles distincts de s , ces deux cycles se regroupent en un seul cycle de ss_{ab} . Si au contraire, a et b appartiennent au même cycle de s , ce cycle se scinde en deux cycles de ss_{ab} . En tout état de cause, les cycles de s qui ne contiennent ni a ni b sont des cycles pour ss_{ab} . Les deux figures suivantes nous dispenseront de faire un raisonnement plus explicite ⁽³⁾.



Une dernière manière de procéder consiste à éviter le problème. Dans un cours élémentaire, la principale utilité de la signature d'une permutation est de permettre la définition du déterminant d'une matrice. Or, on peut définir directement les déterminants par récurrence sur leur ordre, en procédant par exemple par développement selon les éléments de la première colonne. Il n'est pas trop difficile de développer toute la théorie des déterminants à partir de cette définition, sans utiliser une seule fois les permutations. Une fois ceci fait, on définit la signature d'une permutation comme le déterminant de la matrice de permutation correspondante. La règle de

³⁾ On peut aussi montrer que la signature d'une permutation s est égale à $(-1)^{c'(s)}$ où $c'(s)$ est le nombre des cycles de longueur paire de s . Si l'on prend ceci comme définition de la signature, il faut montrer que $c'(ss_{ab})$ a une parité différente de celle de $c'(s)$. Les raisonnements sont analogues, mais il faut y ajouter quelques considérations de parité qui les rendent moins immédiatement évidents.

multiplication pour les déterminants redonne alors la règle de multiplication des signatures pour les permutations. Cette méthode nous a été signalée par P. Gabriel, qui l'a utilisée plusieurs fois dans ses cours.

6. *Considérations pédagogiques.*

Les méthodes fondées sur le nombre d'inversions (ou la variante proposée au n° 4) reposent sur la distinction entre un *ensemble* à deux éléments et un *couple*; cette distinction est capitale, mais assez délicate à saisir pour des débutants. Ces méthodes utilisent aussi la notion de réarrangement des termes d'un produit sous une forme assez subtile. Elles comportent enfin un aspect combinatoire important dans l'énumération des inversions. On connaît bien les difficultés d'exposition des théories combinatoires; si l'on peut se faire une idée assez nette des mécanismes en jeu sur un exemple bien explicité, il est difficile de formuler des raisonnements généraux et en particulier de s'assurer du caractère exhaustif de l'énumération des cas. Il y faut une imagination assez particulière qui ne se développe qu'à l'usage. Ces raisons expliquent la peine qu'éprouvent les débutants à suivre de tels raisonnements.

On peut aussi juger les méthodes précédentes sur leur économie de moyens. De ce point de vue, la méthode C) du n° 3 introduit le minimum de notions étrangères, mais sa sobriété la rend assez difficile à suivre. Bourbaki l'expose de manière concise dans [1], page 99; il emploie la notation trop suggestive $\pi(V_n)$ pour $\Pi(\pi)$, ce qui a induit en erreur certains de ceux qui l'ont recopié [7, page 153]. Parmi les notions étrangères que nous avons introduites, celle de permutation des variables dans une fonction se retrouvera inévitablement dans l'étude des polynômes symétriques; celle de graphe me semble devoir être présentée le plus tôt possible aux étudiants, mais l'expérience m'a montré que la démonstration du n° 4 nécessitait beaucoup d'explications pour être comprise. Enfin, la notion de cycle d'une permutation me semble avoir sa place, même dans un cours introductif.

Toutes ces raisons nous font préférer la méthode de permutation des variables (cf. n° 3, B)) et celle des cycles à toutes les autres.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI, N., *Algèbre*, Chapitre I, 2^e édition. Hermann, Paris, 1964.
- [2] ——— *Groupes et Algèbres de Lie*, Chapitres 4 à 6. Hermann, Paris, 1968.
- [3] BURNSIDE, W., *Theory of groups of finite order*. Dover, New York, 1955.
- [4] CARTIER, P., Sur une généralisation du transfert en théorie des groupes. Ce même volume, pp. 49-57.