

§ 9. Discussion of case (ii) : G 0-dimensional

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

In particular, taking $\Delta_j = \{n \in \mathbb{Z} : 2^j \leq n < 2^{j+1}\}$ it can be arranged that

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pm \hat{f}(n)}{(\log(2 + |n|))^\alpha}$$

diverges for any preassigned distribution of signs \pm and any preassigned $\alpha < \frac{1}{4}$.

Of course, much stronger results are derivable by using random (and unassignable!) changes of sign, but there seems little hope of making this even remotely constructive.

§ 9. Discussion of case (ii) : G 0-dimensional

9.1 In this case there is ([7], (7.7)) a base of neighbourhoods of zero in G formed of compact open subgroups W . For each such W the annihilator $\Delta = W^\circ$ in Γ of W is a finite subgroup of Γ . Define

$$k_W = \lambda_G(W)^{-1} \times \text{characteristic function of } W. \tag{9.1}$$

Then k_W is continuous, $k_W \geq 0$, $\int_G k_W d\lambda_G = 1$. The transform \hat{k}_W of k_W is plainly equal to unity on Δ . On the other hand, since W is a subgroup, we have for $a \in W$ and $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \hat{k}_W(\gamma) &= \int_G k_W(x) \overline{\gamma(x)} d\lambda_G(x) = \int_G k_W(x+a) \overline{\gamma(x)} d\lambda_G(x) \\ &= \int_G k_W(y) \overline{\gamma(y-a)} d\lambda_G(y) \\ &= \gamma(a) \hat{k}_W(\gamma), \end{aligned}$$

which shows that $\hat{k}_W(\gamma) = 0$ if $\gamma \in \Gamma \setminus \Delta$. Thus \hat{k}_W is the characteristic function of Δ , and so

$$k_W = D_{W^\circ}. \tag{9.2}$$

By (9.1) and (9.2), a routine argument shows that, if $1 \leq p < \infty$ and $f \in L^p(G)$, then

$$f = \lim_W S_{W^\circ} f \tag{9.3}$$

in $L^p(G)$; and that (9.3) holds uniformly for any continuous f .

9.2 PROOF OF 7.4 (ii). If Γ_0 is any countably infinite subgroup of Γ we can choose a sequence W_j of compact open subgroups of G such that

$W_{j+1} \subseteq W_j$ and $\Gamma_0 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j^\circ$, where W_j° is a finite subgroup of Γ and $W_j^\circ \subseteq W_{j+1}^\circ$. The $\Delta_j = W_j^\circ \cap \Gamma_0$ satisfy (7.2) and, from (9.3),

$$f = \lim_j S_{\Delta_j} f \tag{9.4}$$

uniformly for any continuous f with $\text{sp}(f) \subseteq \Gamma_0$. This verifies the statements made in 7.4 (ii).

9.3 By using the results in [3], more can be said in case (ii) of 7.4; cf. [3], Theorem (2.9) and Example (4.8).

Let $f \in L^1(G)$ and let Γ_0 be any countable subgroup of Γ containing $\text{sp}(f)$. Choose the W_j as in 9.2. Then, apart from the fact that (W_j) is not in general a base at 0 in G (they can be chosen to be so if and only if G is first countable), (W_j) is an open-compact D'' -sequence ([3], p. 188). The proof of Theorem (2.5) of [3] is easily modified to show that

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} S_{W_j^\circ} f(x) \tag{9.5}$$

holds for almost all $x \in G$. Moreover, Theorem (2.7) of [3] applies to show that the majorant function

$$S^* f(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |S_{W_j^\circ} f(x)| \tag{9.6}$$

satisfies the estimates

$$\|S^* f\|_p \leq 2(p(p-1)^{-1})^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \quad (1 < p < \infty) \tag{9.7}$$

$$\|S^* f\|_1 \leq 2 + 2 \int_G |f| \log^+ |f| d\lambda_G, \tag{9.8}$$

$$\|S^* f\|_p \leq 2(1-p)^{\frac{1}{p}} \|f\|_1 \quad (0 < p < 1). \tag{9.9}$$

In particular, the convergence in (9.5) is dominated whenever

$$|f| \log^+ |f| \in L^1(G).$$

A more immediate consequence of (9.1) and (9.2) is a strong version of localisability of the convergence of Fourier series: if $f \in L^1(G)$ vanishes a.e. on some neighbourhood of $x_0 \in G$, we can choose the W_j so that $S_{\Delta_j} f(x_0) = 0$ for every sufficiently large j . [A suitable choice of W_j may be made once for all, independent of f , if G is first countable.] Nothing similar is true for general G ; see, for example, [11], Vol. II, pp. 304-305.