

# 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# NOTE RELATIVE AUX THÉORÈMES DES $S$ -UNITÉS ET DES $S$ -CLASSES

par Jean-René JOLY

## 1. INTRODUCTION

Soit  $K$  un corps de nombres algébriques de degré  $n$  sur  $\mathbf{Q}$ , et désignons par  $A$  l'anneau des entiers de  $K$ , par  $U$  le groupe des unités de  $A$  et par  $r_1$  (resp.  $2r_2$ ) le nombre de plongements réels (resp. non réels) de  $K$  dans  $\mathbf{C}$ ; on a  $n = r_1 + 2r_2$ , et  $a = r_1 + r_2$  est égal au nombre de places archimédiennes de  $K$ . Si alors  $|\cdot|_1, |\cdot|_2, \dots, |\cdot|_a$  sont les valeurs absolues normalisées correspondant à ces places, le classique *théorème des unités* de Dirichlet s'énonce:

(1) Soit  $L : U \rightarrow \mathbf{R}^a$  l'homomorphisme défini par

$$x \mapsto (\log |x|_1, \log |x|_2, \dots, \log |x|_a).$$

Le noyau de  $L$  est le groupe  $W$  (fini, cyclique) des racines de l'unité appartenant à  $K$ , et l'image  $L(U)$  est un réseau de rang  $r = a - 1$  dans  $\mathbf{R}^a$ . Le groupe  $U$  est donc produit direct de  $W$  par un groupe abélien libre de rang  $r$ .

Ce théorème se double du *théorème de la finitude du groupe des classes* :

(2) L'ordre  $h$  du groupe des classes d'idéaux de  $A$  est fini.

Ces deux théorèmes se démontrent facilement, on le sait, à l'aide du *théorème des corps convexes* de Minkowski: voir par exemple [3], chap. 12, ou [7], chap. 2, ou encore [10], chap. 4. Ils ont été généralisés par Hasse et Chevalley (voir [1]) de la façon suivante: soit  $S$  un ensemble fini de places de  $K$  contenant toutes les places archimédiennes, et soit  $D$  l'ensemble des places discrètes de  $K$  appartenant à  $S$ ; si  $s = \text{Card } S$  et si  $d = \text{Card } D$ , on a donc  $s = a + d$ . Notons  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_d$  les idéaux premiers de  $A$  correspondant aux places de  $D$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_d$  les valuations discrètes normalisées et  $|\cdot|_{a+1}, |\cdot|_{a+2}, \dots, |\cdot|_s$  les valeurs absolues normalisées associées à ces places (voir [3], chap. 3),  $A_S$  l'anneau des  $S$ -entiers de  $K$ , c'est-à-dire l'anneau (de Dedekind) formé des  $x \in K$  tels que  $v(x) \geq 0$  pour toute

valuation discrète normalisée  $v$  autre que  $v_1, v_2, \dots, v_d$ , et  $U_S$  le groupe des  $S$ -unités de  $K$ , c'est-à-dire le groupe des unités de  $A_S$ . Avec ces notations, Hasse et Chevalley ont donc démontré le *théorème des  $S$ -unités* :

(3) Soit  $\Lambda : U_S \rightarrow \mathbf{R}^s$  l'homomorphisme défini par

$$x \mapsto (\log |x|_1, \dots, \log |x|_a, \log |x|_{a+1}, \dots, \log |x|_s).$$

Le noyau de  $\Lambda$  est le groupe  $W$  des racines de l'unité appartenant à  $K$ , et l'image  $\Lambda(U_S)$  est un réseau de rang  $s - 1 = r + d$  dans  $\mathbf{R}^s$ . Le groupe  $U_S$  est donc produit direct de  $W$  par un groupe abélien libre de rang  $s - 1$ .

Ce théorème se complète par le *théorème des  $S$ -classes* :

(4) L'ordre  $h_S$  du groupe des classes d'idéaux de  $A_S$  est fini (en fait,  $h_S$  divise  $h$ ). De plus, pour  $S$  « suffisamment grand »,  $h_S$  est égal à 1, autrement dit,  $A_S$  est principal.

Ces deux théorèmes (des  $S$ -unités et des  $S$ -classes) ont l'intérêt de permettre, grâce au lemme de Herbrand, une démonstration non analytique et relativement simple des deux inégalités fondamentales de la théorie du corps de classes (voir par exemple [4], chap. 5 et 6, ou [8], chap. VIII, §8-9). Les démonstrations de ces deux théorèmes qu'on trouve dans la littérature s'inspirent en général de l'article d'Artin-Whaples [2], et s'appuient sur des calculs de volumes et de densités : voir par exemple [5], [6]; dans cet ordre d'idées, la méthode la plus élégante consiste d'ailleurs à prouver tout d'abord la compacité du groupe  $J_K^1/K^*$  des classes d'idèles de volume 1, et à déduire de là les théorèmes (3) et (4) : c'est la technique adoptée dans [8] et [9] (voir aussi [5], pp. 219-222).

Le but de la présente note est de donner des théorèmes (3) et (4) une démonstration directe à partir des classiques théorèmes (1) et (2) de Dirichlet; en plus de son caractère naturel, cette méthode a l'avantage de bien faire voir le mécanisme de la « dilatation » du groupe des  $S$ -unités et de la « contraction » du groupe des  $S$ -classes lorsqu'on « dilate » l'ensemble  $S$ . Le §2 est consacré à l'étude de l'anneau  $A_S$ . Les théorèmes (3) et (4) sont démontrés respectivement aux §3 et 4. Le §5 illustre par un exemple les démonstrations données aux §3 et 4.