1. Introduction

NOTE RELATIVE AUX THÉORÈMES DES S-UNITÉS ET DES S-CLASSES

par Jean-René JOLY

1. INTRODUCTION

Soit K un corps de nombres algébriques de degré n sur $\mathbf{Q}$, et désignons par A l'anneau des entiers de K, par U le groupe des unités de A et par r_1 (resp. $2r_2$) le nombre de plongements réels (resp. non réels) de K dans $\mathbf{C}$; on a $n = r_1 + 2r_2$, et $a = r_1 + r_2$ est égal au nombre de places archimédiennes de K. Si alors $|.|_1, |.|_2, \ldots, |.|_a$ sont les valeurs absolues normalisées correspondant à ces places, le classique *théorème des unités* de Dirichlet s'énonce:

(1) *Soit* $L : U \to \mathbf{R}^a$ *l'homomorphisme défini par*

$$x \mapsto (\log |x|_1, \log |x|_2, \ldots, \log |x|_a).$$

Le noyau de L *est le groupe* W *(fini, cyclique) des racines de l'unité appartenant à* K, *et l'image* $L(U)$ *est un réseau de rang* $r = a - 1$ *dans* $\mathbf{R}^a$. *Le groupe* U *est donc produit direct de* W *par un groupe abélien libre de rang* r.

Ce théorème se double du *théorème de la finitude du groupe des classes:*

(2) *L'ordre* h *du groupe des classes d'idéaux de* A *est fini.*

Ces deux théorèmes se démontrent facilement, on le sait, à l'aide du *théorème des corps convexes* de Minkowski: voir par exemple [3], chap. 12, ou [7], chap. 2, ou encore [10], chap. 4. Ils ont été généralisés par Hasse et Chevalley (voir [1]) de la façon suivante: soit S un ensemble fini de places de K contenant toutes les places archimédiennes, et soit D l'ensemble des places discrètes de K appartenant à S; si $s = \text{Card } S$ et si $d = \text{Card } D$, on a donc $s = a + d$. Notons $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_d$ les idéaux premiers de A correspondant aux places de D, $v_1, v_2, \ldots, v_d$ les valuations discrètes normalisées et $|.|_{a+1}, |.|_{a+2}, \ldots, |.|_s$ les valeurs absolues normalisées associées à ces places (voir [3], chap. 3), A_S l'anneau des S-entiers de K, c'est-à-dire l'anneau (de Dedekind) formé des $x \in K$ tels que $v(x) \geq 0$ pour toute valuation discrète normalisée v autre que $v_1, v_2, \ldots, v_d$, et U_S le groupe des S-unités de K, c'est-à-dire le groupe des unités de A_S. Avec ces notations, Hasse et Chevalley ont donc démontré le *théorème des S-unités :*

(3) *Soit* $\Lambda : U_S \to \mathbf{R}^s$ *l'homomorphisme défini par*

$$x \mapsto (\log |x|_1, \ldots, \log |x|_a, \log |x|_{a+1}, \ldots, \log |x|_s).$$

Le noyau de Λ *est le groupe* W *des racines de l'unité appartenant à* K, *et l'image* $\Lambda(U_S)$ *est un réseau de rang* $s - 1 = r + d$ *dans* $\mathbf{R}^s$. *Le groupe* U_S *est donc produit direct de* W *par un groupe abélien libre de rang* $s - 1$.

Ce théorème se complète par le *théorème des S-classes :*

(4) *L'ordre* h_S *du groupe des classes d'idéaux de* A_S *est fini (en fait,* h_S *divise* h*). De plus, pour* S *« suffisamment grand »,* h_S *est égal à* 1, *autrement dit,* A_S *est principal.*

Ces deux théorèmes (des S-unités et des S-classes) ont l'intérêt de permettre, grâce au lemme de Herbrand, une démonstration non analytique et relativement simple des deux inégalités fondamentales de la théorie du corps de classes (voir par exemple [4], chap. 5 et 6, ou [8], chap. VIII, §8-9). Les démonstrations de ces deux théorèmes qu'on trouve dans la littérature s'inspirent en général de l'article d'Artin-Whaples [2], et s'appuient sur des calculs de volumes et de densités: voir par exemple [5], [6]; dans cet ordre d'idées, la méthode la plus élégante consiste d'ailleurs à prouver tout d'abord la compacité du groupe J_K^1/K^* des classes d'idèles de volume 1, et à déduire de là les théorèmes (3) et (4): c'est la technique adoptée dans [8] et [9] (voir aussi [5], pp. 219-222).

Le but de la présente note est de donner des théorèmes (3) et (4) une démonstration directe à partir des classiques théorèmes (1) et (2) de Dirichlet; en plus de son caractère naturel, cette méthode a l'avantage de bien faire voir le mécanisme de la « dilatation » du groupe des S-unités et de la « contraction » du groupe des S-classes lorsqu'on « dilate » l'ensemble S. Le §2 est consacré à l'étude de l'anneau A_S. Les théorèmes (3) et (4) sont démontrés respectivement aux §3 et 4. Le §5 illustre par un exemple les démonstrations données aux §3 et 4.