RELATIONS ENTRE LA TOPOLOGIE ET LA THÉORIE DES INTÉGRALES MULTIPLES

Autor(en): **de Rham, Georges**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-27312

RELATIONS ENTRE LA TOPOLOGIE ET LA THÉORIE DES INTÉGRALES MULTIPLES[1]

PAR

Georges DE RHAM (Lausanne).

Le fait que la Topologie intervient dans des problèmes relatifs aux intégrales multiples a été aperçu déjà par les fondateurs de la topologie des variétés: RIEMANN, BETTI et POINCARÉ, à propos de l'étude des intégrales attachées à une variété algébrique. M. CARTAN, amené sur ce même sujet par ses recherches sur les groupes continus, a formulé pour la première fois d'une manière précise les deux premiers des trois théorèmes dont je vais parler au début, et qui résument, à mon avis, toutes les relations entre la topologie et la théorie des intégrales partout régulières sur une variété close.

1. — LES TROIS THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

Considérons une variété à n dimensions V, close et orientable. Une intégrale p-uple sur cette variété est un nombre

$$\mathrm{I} = \int_c \omega$$

qui dépend de deux choses: l'élément differentiel ω et le champ d'intégration c.

---

[1] Conférence faite le 21 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

L'élément ω, que j'appellerai forme de degré p ou p-forme, est une expression de la forme

$$\omega = \sum_{(i_1 \ldots i_p)} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_p} ,$$

les A sont des fonctions continues et à dérivées continues des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sur V. Le champ d'intégration c, que j'appellerai champ à p dimensions ou p-champ, est formé par une ou plusieurs variétés orientées à p dimensions tracées sur V. Les p-champs peuvent être additionnés, soustraits et multipliés par un entier quelconque.

Ces intégrales jouissent des mêmes propriétés générales que les intégrales curvilignes, de surface ou triples dans l'espace ordinaire, qui en sont des cas particuliers. D'abord, I est fonction linéaire du champ c, et fonction linéaire aussi de la forme ω. Ensuite, on a la formule générale de Stokes

$$\int_c \omega' = \int_{f(c)} \omega ,$$

ω est une p-forme régulière quelconque, c est un $(p + 1)$-champ quelconque, ω' est la $(p + 1)$-forme appelée *dérivée (extérieure) de* ω, $f(c)$ le p-champ frontière de c. Cette formule générale contient comme cas particuliers les formules bien connues d'Ampère-Stokes, de Green et d'Ostrogradsky.

Remarquons ici l'analogie qui existe entre l'opération de dérivation appliquée aux formes et celle du passage à la frontière appliquée aux champs. Elles sont toutes deux linéaires, et répétées deux fois de suite, elles produisent toutes deux zéro:

$$(\omega')' = 0 , \qquad f(f(c)) = 0 .$$

Les champs dont la frontière est nulle sont appelés champs fermés ou *cycles*. Les formes dont la dérivée est nulle sont appelées *exactes*. Par analogie avec la définition des homologies entre les champs, je dirai que deux p-formes ω_1 et ω_2 sont *homologues*, $\omega_1 \sim \omega_2$, si leur différence $\omega_1 - \omega_2$ est identique à la dérivée d'une $(p - 1)$-forme régulière sur toute la variété V.

Un intérêt particulier s'attache aux valeurs que peut prendre l'intégrale d'une forme exacte étendue à un cycle, valeurs qu'on appelle *périodes*. La formule de Stokes permet de faire une première remarque évidente: *l'intégrale d'une forme exacte étendue à un cycle homologue à zéro est nulle. Etendue à deux cycles homologues entre eux, elle prend deux valeurs égales.*

Si le p-ième nombre de Betti de V est égal à B, on peut trouver, comme on sait, un système de B p-cycles $c_1, c_2, \ldots, c_B$, qui ne sont reliés par aucune homologie et tels que tout p-cycle est homologue à une combinaison linéaire à coefficients entiers de ces B p-cycles. Un tel système est dit fondamental, les cycles qui le constituent seront dits *cycles fondamentaux*.

Il résulte de là que toute période d'une p-forme exacte est égale à une combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes relatives aux cycles fondamentaux (ou *périodes fondamentales*).

Existe-t-il des formes exactes, régulières sur toute la variété V, ayant des périodes fondamentales arbitrairement choisies ? La réponse est affirmative et constitue le

THÉORÈME I. — *Il existe toujours une* p*-forme exacte et régulière sur* V, *ayant des périodes fondamentales arbitrairement données à l'avance.*

La formule de Stokes conduit à une seconde remarque évidente: c'est que *les périodes d'une forme homologue à zéro sont toutes nulles*. Le théorème suivant affirme la réciproque.

THÉORÈME II. — *Toute* p*-forme exacte et régulière sur* V, *dont les périodes sont toutes nulles, est la dérivée d'une* (p — 1)*-forme régulière sur* V.

On peut aussi énoncer ces théorèmes de la manière suivante:

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que le* p*-cycle* c *soit homologue à zéro est que*

$$\int_c \omega = 0 \,.$$

quelle que soit la p*-forme exacte* ω.

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que la* p-*forme exacte* ω *soit homologue à zéro est que*

$$\int_c \omega = 0 \,.$$

quel que soit le p-*cycle* c.

Sous cette forme, ils font penser au théorème suivant (théorème de dualité de Poincaré), avec lequel ils sont en relation étroite. Désignons par $\mathrm{I}(c^p . c^{n-p})$ le nombre algébrique des points d'intersections du p-cycle c^p avec le $(n - p)$-cycle c^{n-p}. Alors: *la condition nécessaire et suffisante pour que le cycle* c^p *soit homologue à zéro, c'est que* $\mathrm{I}(\mathrm{c}^\mathrm{p} . \mathrm{c}^{\mathrm{n-p}}) = 0$ *quel que soit le cycle* $\mathrm{c}^{\mathrm{n-p}}$.

Généralisons un peu la notion de cycle, en donnant encore ce nom aux combinaisons linéaires à coefficients constants quelconques (et non nécessairement entiers) de cycles ordinaires. Le symbole $\mathrm{I}(c^n . c^{n-p})$ conserve sa signification, mais il n'est plus nécessairement égal à un nombre entier. Il résulte du théorème de Poincaré qu'à toute p-forme exacte ω on peut associer un $(n - p)$-cycle c^{n-p} tel que

$$\int_{c^p} \omega = \mathrm{I}(c^p \cdot c^{n-p})$$

quel que soit le p-cycle c^p. Il est clair que ce cycle associé n'est déterminé qu'à une homologie près, et que sa connaissance équivaut à celle des périodes fondamentales de ω.

En tenant compte du théorème de Poincaré, le contenu de nos deux théorèmes revient alors à ceci :

I. *A tout* (n — p)-*cycle correspond une* p-*forme exacte associée.*

II. *Pour qu'une* p-*forme exacte soit homologue à zéro, il suffit que le* (n — p)-*cycle associé le soit.*

De deux formes ω_1 et ω_2, de degrés p et q, on déduit une forme bien déterminée de degré $p + q$, leur produit (extérieur) $\omega_1 \omega_2$. Si ω_1 et ω_2 sont des formes exactes, le produit l'est aussi. Il est alors naturel de se demander comment les périodes du produit dépendent de celles des facteurs. La réponse est fournie par le

THÉORÈME III. — *Si* c_1 *et* c_2 *sont les cycles associés à* ω_1 *et* ω_2, *le cycle associé au produit* $\omega_1\,\omega_2$ *est le cycle* $c_2 \,.\, c_1$ *intersection de* c_2 *avec* c_1.

Supposons en particulier que $q = n - p$; le produit $\omega_1\,\omega_2$ est alors une n-forme dont la seule période fondamentale est

$$\int_V \omega_1\,\omega_2$$

et le théorème III se réduit à l'égalité

$$\int_V \omega_1\,\omega_2 = \mathrm{I}\,(c_2 \cdot c_1)\ .$$

En combinant cette égalité avec le théorème de dualité de Poincaré, on obtient le résultat suivant:

Pour que la p*-forme exacte* ω_1 *soit homologue à zéro, il faut et il suffit que*

$$\int_V \omega_1\,\omega_2 = 0\ ,$$

quelle que soit la (n — p)*-forme exacte* ω_2.

2. — APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS.

Voici une application intéressante de ce dernier résultat. Supposons que V soit la riemannienne à 4 dimensions qui correspond à une surface algébrique, et ω_1 l'élément d'une intégrale double de première espèce attachée à cette surface. Si ω_2 est l'imaginaire conjuguée de ω_1, on voit immédiatement que

$$\int_V \omega_1\,\omega_2 > 0\ .$$

Donc ω_1 ne peut pas être homologue à zéro: *une intégrale double de première espèce ne peut pas avoir toutes ses périodes nulles.*

C'est le théorème démontré par M. W. V. D. Hodge en 1930. (Dans cet ordre d'idées, le théorème III est le véritable fondement topologique des relations de Riemann et de M. Hodge entre les périodes des intégrales abéliennes.)

Dans un ordre d'idées voisin, je désire mentionner un complément important apporté par M. Hodge au théorème I pour les variétés V qui sont des espaces de Riemann.

Supposons d'abord que V soit une surface de genre p; le premier nombre de Betti est égal à $2p$, il y a donc $2p$ cycles fondamentaux et une intégrale curviligne possède $2p$ périodes fondamentales. Or, depuis Riemann, on sait dans ce cas beaucoup plus que ce que nous apprend le théorème I, on sait en effet qu'il existe une intégrale *harmonique* ayant des périodes fondamentales arbitraires, et c'est ce *théorème d'existence d'intégrales harmoniques* que M. Hodge a généralisé de la manière suivante.

Dans le plan, avec des coordonnées rectangulaires xy, la condition pour que

$$\int \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy$$

soit harmonique peut s'énoncer ainsi:

1° La forme $\omega = \mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy$ doit être exacte ($\omega' = 0$ ou $\mathrm{A}'_y = \mathrm{B}'_x$).

2° La forme $\omega^* = -\mathrm{B}dx + \mathrm{A}dy$ (que j'appellerai adjointe à ω) doit être aussi exacte ($\omega^{*\prime} = 0$ ou $\mathrm{A}'_x + \mathrm{B}'_y = 0$).

Si $\omega = df$, la première condition est automatiquement vérifiée et la seconde se réduit à l'équation de Laplace $\Delta f = 0$. La notion de forme adjointe n'est pas topologique comme celles de dérivée extérieure ou de produit extérieur, mais elle fait intervenir la métrique; on peut considérer ω comme le travail élémentaire du vecteur $v = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, ω^* est alors le travail élémentaire du vecteur $v^* = (-\mathrm{B}, \mathrm{A})$ qui se déduit de v par une rotation de 90 degrés. Remarquons aussi que l'élément de l'intégrale de Dirichlet, $(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\,dx\,dy$, n'est pas autre chose que le produit de ω par la forme adjointe ω^*.

Dans un espace de Riemann à n dimensions, toute p-forme ω peut être considérée comme le produit scalaire de l'élément de variété à p dimensions par un système de p-vecteurs déterminé en chaque point de l'espace; la forme adjointe ω^*, de degré $n - p$, est alors le produit scalaire de l'élément de variété à $n - p$ dimensions par le système des $(n - p)$-vecteurs supplémentaires [1]. Toute p-forme ω possède donc une forme adjointe ω^*, de degré $n - p$; et le produit $\omega\omega^*$, égal au produit de l'élément de volume à n dimensions par le carré de la mesure du système de p-vecteurs déterminant ω, est une n-forme essentiellement positive.

On peut maintenant généraliser la notion d'intégrale harmonique en disant que, ω étant une p-forme régulière sur l'espace de Riemann V, $\int \omega$ est harmonique si ω et la forme adjointe ω^* sont toutes deux exactes. Cette définition posée, M. Hodge démontre l'existence d'une intégrale p-uple harmonique ayant des périodes arbitrairement données en suivant la méthode de Riemann-Hilbert du principe de Dirichlet. Considérant la famille de toutes les p-formes exactes et régulières sur l'espace V et ayant les périodes fondamentales données, il prouve qu'il y en a une qui rend l'intégrale n-uple $\int_V \omega\omega^*$ minimum et qui fournit l'intégrale harmonique cherchée. Pour s'assurer de l'unicité, il suffit de prouver qu'une intégrale harmonique non identiquement nulle ne peut pas avoir toutes ses périodes nulles, et cela résulte de l'inégalité $\int_V \omega\omega^* > 0$ (même raisonnement que pour les intégrales doubles de première espèce).

Voici un autre théorème qui apporte un complément analogue au théorème II:

ω étant une (p + 1)*-forme régulière sur l'espace de Riemann* V, *et homologue à zéro, il existe une forme ϖ, régulière sur* V, *telle que $\varpi' = \omega$ et dont la forme adjointe est homologue à zéro. Cette forme ϖ, unique, est caractérisée, dans la famille de toutes les formes régulières dont la dérivée est égale à ω, par la propriété de rendre l'intégrale $\int_V \varpi\varpi^*$ minimum.*

Dans le cas $n = 2$ et $p = 1$, cela revient à affirmer l'existence

[1] Voir, par exemple: E. CARTAN, La Géométrie des espaces de Riemann *(Mémorial des Sciences mathématiques)*.

d'une fonction uniforme sur une surface donnée S, dont le laplacien soit égal à une fonction donnée f telle que $\int_{S} f d\sigma = 0$.

3. — Principe de la démonstration du théorème I.

Considérons, pour fixer les idées, une variété à 3 dimensions sur laquelle on a un cycle à 2 dimensions c^2 non homologue à zéro. Il s'agit de construire une forme exacte de degré 2, régulière sur toute la variété, dont la période relative à c^2 ne soit pas nulle. Une telle forme

$$\omega = \mathrm{A}\, dy\, dz + \mathrm{B}\, dz\, dx + \mathrm{C}\, dx\, dy$$

peut être considérée comme l'expression du débit élémentaire d'un courant électrique (stationnaire) de volume, son intégrale étendue à un champ c à 2 dimensions est alors le débit total à travers c et la condition que la forme soit exacte ($\omega' = 0$ ou $\mathrm{A}'_x + \mathrm{B}'_y + \mathrm{C}'_z = 0$) exprime que le courant est conservatif. Notre problème consiste donc à construire un courant de volume, régulier et conservatif sur toute la variété, dont le débit total à travers c^2 ne soit pas nul.

D'après le théorème de dualité de Poincaré, il existe un cycle à une dimension c^1, dont le nombre algébrique des points d'intersections avec c^2 n'est pas nul: $\mathrm{I}(c^2 . c^1) \neq 0$. Imaginons que les lignes constituant c^1 (lignes fermées et orientées) soient des fils métalliques parcourus par un courant électrique d'intensité constante égale à un. Le débit de ce courant à travers c^2 est égal à $\mathrm{I}(c^2 . c^1)$, donc non nul. Ce courant est d'ailleurs conservatif (car c^1 est fermé). On conçoit ensuite la possibilité d'étaler un peu ce courant, de manière qu'il remplisse une sorte de tube entourant c^1, avec une intensité de volume continue à l'intérieur du tube et nulle sur sa frontière. La forme ω, égale au débit élémentaire de ce courant dans le tube et nulle en dehors, satisfait à toutes les conditions requises.

On voit que, dans l'espace ordinaire, une même entité physique (le courant électrique), est représentée dans un cas par un champ à une dimension (courant linéaire), dans un autre cas par une forme de degré deux (courant de volume). Cela suggère l'idée que dans une variété à n dimensions V, un p-champ et une $(n - p)$-forme doivent être deux aspects d'une même notion plus générale, que j'appellerai courant à p dimensions. Telle est l'idée qui m'a conduit à la démonstration des trois théorèmes dont on vient de parler. Je vais maintenant esquisser la théorie de ces courants et montrer comment elle conduit de manière très naturelle à la théorie des résidus d'intégrales doubles.

4. — Théorie des courants.

Définitions. — Un *p-courant élémentaire* est l'ensemble (c^{p+k}, ω^k) d'un $(p + k)$-champ c^{p+k} et d'une k-forme ω (définie au moins sur c^{p+k}). p est la dimension du courant. Comme $0 \leqq p + k \leqq n$ et $0 \leqq k \leqq n$, l'entier k ne peut prendre que les $n - p + 1$ valeurs $0, 1, \ldots, (n - p)$; il y a $(n - p + 1)$ types de p-courants élémentaires.

Un p-*courant* est la réunion d'un nombre fini de p-courants élémentaires.

Addition et multiplication par un nombre. — La *somme* $C_1 + C_2$ de deux p-courants C_1 et C_2 est le p-courant formé par la réunion des p-courants élémentaires constituant C_1 et C_2.

Le *produit* du p-courant élémentaire $C = (c, \omega)$ par le nombre λ est le p-courant élémentaire $C = (c, \lambda\omega)$. Pour multiplier un courant quelconque par λ, on multipliera chacun des courants élémentaires qui le constitue par λ.

Conventions de simplification.

$$(c\,, \omega) = 0 \quad \text{si} \quad c = 0 \quad \text{ou si} \quad \omega = 0 \quad \text{sur } c\,.$$

$$(\lambda c\,, \omega) = \lambda (c\,, \omega)\,.$$

$$(c_1, \omega) + (c_2, \omega) = (c_1 + c_2, \omega)\,. \quad (c, \omega_1) + (c, \omega_2) = (c, \omega_1 + \omega_2)\,.$$

Produit de deux courants. — Le produit du p-courant élémentaire (c^{p+k}, ω^k) par le q-courant élémentaire (c^{q+l}, ω^l) est le $(p + q - n)$-courant élémentaire.

$$(c^{p+k}\,, \omega^k)\,(c^{q+l}\,, \omega^l) = (-1)^{k(n-q-l)}\,(c^{p+k} \cdot c^{q+l}\,, \omega^l\,\omega^k)$$

où $c^{p+k} \, . \, c^{q+l}$ est l'intersection de c^{p+k} avec c^{q+l} et $\omega^l \omega^k$ le produit (extérieur) de ω^l par ω^k.

Le produit de deux courants quelconques s'obtient par la règle de distribution (tout courant étant la somme de courants élémentaires).

Dérivé d'un courant. — Le dérivé du p-courant élémentaire (c^{p+k}, ω^k) est le $(p-1)$-courant

$$d(c^{p+k}, \omega^k) = (c, \omega') + (-1)^k (f(c), \omega)$$

où ω' est la $(k+1)$-forme égale à la dérivée extérieure de ω^k et $f(c)$ le $(p+k-1)$-champ frontière du $(p+k)$-champ c^{p+k}.

Le dérivé d'un courant est la somme des dérivés des courants élémentaires qui le constituent.

Indice d'un o-*courant.* — On appellera *indice* du o-courant élémentaire $C^0 = (c^k, \omega^k)$ le nombre

$$I(c^0) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \int_{c^k} \omega^k \, .$$

L'indice d'un courant quelconque est égal par définition à la somme des indices des courants élémentaires qui le constituent.

Si $k=0$, c^k est un o-champ, c'est-à-dire un système de points P_i (en nombre fini) affectés de coefficients k_i: $c^0 = \sum_i k_i P_i$; ω^k est une fonction de point $\omega^0 = f(P)$ et le signe $\int_{c^k} \omega^k$ est alors défini par

$$\int_{c^0} \omega^0 = \sum_i k_i f(P_i) \, .$$

Propriétés des opérations définies. — *a*) Les p-courants forment un espace vectoriel.

b) La multiplication de deux courants est une opération distributive par rapport à l'addition, associative, et pseudo-commutative: $C^p \, . \, C^q = (-1)^{(n-p)(n-q)} C^q \, . \, C^p$, p et q étant les dimensions de C^p et C^q.

c) La dérivation est une opération linéaire : $d(\lambda C_1 + \mu C_2)$

$= \lambda dC_1 + \mu dC_2$. Le second dérivé est toujours nul: $d(dC) = 0$. Le dérivé d'un produit est donné par la formule

$$d(C^p \cdot C^q) = C^p \cdot dC^q + (-1)^{n-p} dC^p \cdot C^q .$$

d) L'indice d'un *o*-courant est fonction linéaire de ce *o*-courant, et si $C^0 = dC^1$, $I(C^0) = I(dC^1) = 0$.

Remarques. — *a*) La théorie précédente contient les deux théories des champs et des formes.

Appliquées à l'intérieur du système des courants du type $(c, 1)$, les opérations définies n'en font pas sortir et coïncident avec les opérations de la théorie des champs appliquées à c: la multiplication et la dérivation coïncident respectivement avec l'intersection et le passage à la frontière. L'indice d'un *o*-courant de ce type, $I(c, 1)$, est égal à la somme des coefficients des points du *o*-champ c, et si $c = c^p . c^{n-p}$, $I(c . 1)$ est égal au nombre $I(c^p . c^{n-p})$ des points d'intersection de c^p avec c^{n-p}.

Appliquées à l'intérieur du système des courants du type (V, ω), les opérations définies n'en font pas sortir et coïncident avec les opérations de même nom de la théorie des formes appliquées à ω. L'indice d'un *o*-courant (V, ω) de ce type est égal (au signe près) à l'intégrale de la forme ω étendue à V.

Nous conviendrons par suite de considérer (V, ω) et ω comme identiques, de même que $(c, 1)$ et c.

Remarquons encore que, comme $(c, \omega) = (c, 1)(V, \omega)$, tout courant est une somme de produits d'un champ par une forme. Le *n*-courant $(V, 1)$, identique à la fois au *n*-champ V et à la *o*-forme 1, joue le rôle d'unité dans la multiplication.

Dans le langage des algébristes, les systèmes des courants, des formes et des champs sont des algèbres, et l'algèbre des courants est le produit direct de l'algèbre des formes et de l'algèbre des champs.

b) Pour que cette notion de courant ne paraisse pas trop artificielle, indiquons une interprétation physique des 1-courants et des *o*-courants dans l'espace ordinaire.

Un courant électrique (stationnaire) peut toujours être représenté par un 1-courant. Les trois types possibles de 1-courants dans l'espace, (c^{k+1}, ω^k) $(k = 0, 1, 2)$, représentent respectivement les courants linéaires ($k = 0$), superficiels ($k = 1$), ou de volume ($k = 2$). c^{k+1} est le support (à $(k+1)$ dimensions) du courant, ω^k est le débit élémentaire à travers l'élément de variété à k dimensions tracé sur c^{k+1}.

Une distribution de masse dans l'espace est représentée par un o-courant. Les quatre types possibles de o-courants, (c^k, ω^k) (pour $k = 0, 1, 2, 3$) représentent respectivement les masses ponctuelles ($k = 0$), linéaires ($k = 1$), superficielles ($k = 2$), ou de volume ($k = 3$). c^k est le support des masses, ω^k mesure la masse contenue dans un élément de c^k.

L'indice d'un o-courant a aussi une interprétation physique simple. Soit C^1 le 1-courant qui représente un courant électrique, c^2 un champ à 2 dimensions. Le produit $(c^2, 1) \cdot C^1$ est un o-courant, *son indice est le débit d'électricité à travers* c^2 (quel que soit le type de C^1, même s'il est une somme de courants des trois types).

Soit encore C^0 le o-courant qui représente une distribution de masses, c^3 un 3-champ. Le produit $(c^3, 1) \cdot C^0$ est un o-courant dont *l'indice est la quantité de masse contenue dans* c^3. L'indice de C^0 est la masse totale répartie dans tout l'espace.

Considérons enfin la dérivation. Si C^1 est un 1-courant qui représente un courant électrique, son dérivé dC^1 est le o-courant qui représente la répartition des sources (positives et négatives) d'électricité.

c) A tout $(n - p)$-courant C^{n-p} correspond une fonctionnelle linéaire de p-courant

$$F(C^p) = I(C^p \cdot C^{n-p}) .$$

Cela permet, dans des cas assez généraux, de déterminer le $(n - p)$-courant C^{n-p} par les valeurs de la fonctionnelle correspondante sur un certain ensemble de p-courants. C'est ainsi qu'une p-forme ω est déterminée par les valeurs de l'intégrale $\int_c \omega$ pour tout champ c.

Il faut remarquer toutefois que, l'intersection de deux champs pouvant être indéterminée, le produit $C^p \cdot C^{n-p}$ et par suite l'indice $I(C^p \cdot C^{n-p})$ ne sont pas déterminés pour tous les couples de courants C^p, C^{n-p}.

5. — Théorie des résidus.

Nous avons supposé que les formes ω introduites dans la théorie des courants étaient partout régulières sur la variété V. Si l'on admet des formes qui présentent des singularités, pour que les lois essentielles de la théorie subsistent, la définition du dérivé doit être complétée. Lorsque ω présente des singularités, le dérivé de (V, ω) se compose non seulement de (V, ω') — ce qui serait le cas si ω était régulière —, mais encore d'autres termes provenant des singularités de ω et qu'on peut appeler les résidus de ω.

Je vais examiner à ce point de vue les formes différentielles algébriques dans le domaine complexe, ce qui nous conduira à la théorie des résidus de Cauchy et de Poincaré. Cette étude est basée sur la formule suivante.

Soient C_1 et C_2 deux courants dont la somme des dimensions est $(n + 1)$, n étant la dimension de la variété considérée; $C_1 . C_2$ est alors un 1-courant, et l'indice de son dérivé $d(C_1 . C_2)$ est nul, ce qui donne

$$I(C_1 dC_2) = \pm I(C_2 dC_1) . \qquad \text{(A)}$$

Cette formule est très importante. Si C_1 et C_2 sont des champs, elle traduit la pseudo-commutativité du coefficient d'enlacement des deux cycles dC_1 et dC_2. Si C_1 et C_2 sont des formes, c'est la formule d'intégration par parties. Si C_1 est un champ et C_2 une forme, c'est la formule de Stokes. Dans les cas que nous allons examiner, elle se réduira aux formules des résidus de Cauchy et Poincaré.

Considérons d'abord une différentielle rationnelle $f(z)\,dz$ sur la sphère de Riemann S de la variable complexe z. Soient z_k $(k = 1, 2, ...)$ ses points singuliers, r_k les résidus correspondants. Nous définissons le dérivé du 1-courant $C^1 = (S, f(z)\,dz)$ par la formule

$$dC^1 = \sum_k (z_k , 2 i \pi r_h) .$$

Soit c^2 un domaine sur S (ou 2-champ) de frontière c^1; c^2 est un 2-courant dont le dérivé est c^1. Appliquons la formule (A). On a

$$C^1 \cdot dc^2 = (S, f(z)\,dz) \cdot (c^1, 1) = -(c^1, f(z)\,dz) ,$$

donc

$$I(C^1 \cdot dc^2) = \int_{c^1} f(z)\,dz .$$

Ensuite

$$c^2 \cdot dC^1 = (c^2, 1) \cdot \sum_k (z_k, 2i\pi r_k) = \sum_k (c^2 \cdot z_k, 2i\pi r_k) .$$

Comme $c^2 . z_k = z_k$ ou 0 suivant que z_k est à l'intérieur ou à l'extérieur de c^2, il vient

$$I(c^2 \cdot dC^1) = 2i\pi \text{ (somme des résidus intérieurs à } c^2)$$

et la formule (A) se réduit à la formule des résidus de Cauchy. La formule $I(dC^1) = 0$ exprime que la somme des résidus est nulle.

Considérons ensuite un élément d'intégrale double

$$\omega = f(x, y)\,dx\,dy ,$$

$f(x, y)$ étant une fonction rationnelle, x et y des coordonnées non homogènes dans le plan projectif complexe V à 4 dimensions réelles. Sa dérivée est nulle, mais elle a des points singuliers qui forment un nombre fini de courbes algébriques (donc des 2-champs) S_1, S_2, S_3, ... Ce sont les courbes polaires de la fonction $f(x, y)$ et éventuellement la droite de l'infini.

Poincaré a montré qu'à chacune de ces courbes est attachée une différentielle abélienne déterminée par ω. Si par exemple $f = \dfrac{P(xy)}{Q(xy)\,R(xy)}$, P, Q, R étant des polynômes, la différentielle attachée à la courbe $Q = 0$ est

$$\frac{2i\pi P \cdot dx}{R \dfrac{\partial Q}{\partial y}} .$$

Soit ω_k la différentielle attachée à S_k. Nous définissons le dérivé du 2-courant $C^2 = (V, \omega)$ par la formule

$$dC^2 = \sum_k (S_k, \omega_k) .$$

Soit c^3 un champ à 3 dimensions sur V, dont la frontière c^2 ne rencontre pas les courbes singulières S_k . c^3 est un 3-courant dont le dérivé est c^2. Appliquons la formule (A). On a

$$C^2 \cdot dC^3 = (V, \omega) \cdot (c^2, 1) = (c^2, \omega) ,$$

d'où

$$I(C^2 \cdot dC^3) = -\int_{c^2} \omega .$$

Ensuite

$$C^3 \cdot dC^2 = (c^3, 1) \cdot \sum_k (S_k, \omega_k) = \sum_k (c^3 \cdot S_k, \omega_k) ,$$

d'où

$$I(C^3 \cdot dC^2) = -\sum_k \int_{c^3 . S_k} \omega_k$$

et la formule (A) devient

$$\iint_{c^2} f(xy)\, dx\, dy = \pm \sum_k \int_{c^3 . S_k} \omega_k .$$

C'est la formule de réduction (de Poincaré) d'une période polaire d'intégrale double à des périodes (polaires ou cycliques) des intégrales abéliennes attachées aux courbes S_k.

En résumé, si les résidus d'une intégrale simple attachée à une courbe algébrique apparaissent comme un système de points affectés de coefficients, les résidus d'une intégrale double attachée à une surface algébrique se présentent sous la forme d'un système de courbes algébriques affectées d'intégrales simples. Plus généralement, les résidus d'une intégrale p-uple attachée à une variété algébrique à n dimensions (complexes) apparaissent comme un système de variétés algébriques à $(n - 1)$ dimensions (complexes) affectées d'intégrales $(p - 1)$-uples.

BIBLIOGRAPHIE

E. CARTAN. Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos (*Comptes rendus*, t. 187, 1928, p. 196-198).

— Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces (*Annales de la Soc. polon. de math.*, t. VIII, 1929, p. 182-225).

W. V. D. HODGE. On multiple integrals attached to an algebraic variety (*Journal of the London Math. Soc.*, vol. 5, part. 4).

— A Dirichlet problem for harmonics functionals, with applications to analytic varieties (*Proceedings of the London Math. Soc.*, sér. 2, vol. 36, part. 4).

— Harmonic functionals in a riemannian space (*Proceedings of the London Math. Soc.*, sér. 2, vol. 38, part. 1 et 2).

H. POINCARÉ. Sur les résidus des intégrales doubles (*Acta mathematica*, 1887).

G. DE RHAM. Sur l'Analysis situs des variétés à *n* dimensions (Thèse, *Journal de Math. p. et appl.*, 1931).

— Sur les périodes des intégrales de première espèce attachées à une variété algébrique (*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 3, p. 151-153).

— Sur la théorie des intersections et les intégrales multiples (*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 4, p. 151-157).

— Sur la notion d'homologie et les résidus d'intégrales multiples (*Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses*, Zürich, 1932, p. 195).