Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 60 (2014)

Artikel: Sur la théorie d'Ahlfors des surfaces
Autor: Duval, Julien
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-630585

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique (2) 60 (2014), 417–420 DOI 10.4171/LEM/60-3/4-8

Sur la théorie d'Ahlfors des surfaces

Julien Duval*

Abstract. On revisite la théorie d'Ahlfors de recouvrement des surfaces à l'aide du théorème de Stokes

Mathematics Subject Classification (2010). 30C25, 30D35.

Keywords. Covering surfaces, Riemann–Hurwitz formula, value distribution theory.

Contexte. On présente la théorie d'Ahlfors (voir par exemple [Th], [Ne]) de manière asymptotique. C'est sa forme utile et les formules sont plus simples. Pour des rappels sur les surfaces de Riemann on renvoie à [Re].

Soit $f_n : \Sigma_n \to \Sigma$ une suite d'applications holomorphes non constantes entre deux surfaces de Riemann compactes connexes Σ_n (avec bord) et Σ (sans bord). On munit Σ d'une métrique d'aire totale 1 qui induit via f_n une pseudométrique sur Σ_n. Dans la suite on suppose que la longueur l_n du bord de Σ_n devient négligeable devant son aire a_n.

Hypothèse. $l_n = o(a_n)$.

On note $\lesssim$ ou $\sim$ une inégalité ou égalité à $o(a_n)$ près.

En conséquence, si θ est une 2-forme sur Σ d'intégrale 1 alors $\int_{\Sigma_n} f_n^*\theta \sim a_n$. En effet θ est cohomologue à la forme d'aire ω, donc $\theta - \omega = d\alpha$ et par le théorème de Stokes $\int_{\Sigma_n} f_n^*\theta - a_n = \int_{\partial\Sigma_n} f_n^*\alpha$ qui est contrôlée par l_n. Une autre manière d'écrire ceci est $\int_\Sigma d_n\theta \sim a_n$ où $d_n(p)$ est le nombre de points dans $f_n^{-1}(p)$.

Dans ce contexte la théorie d'Ahlfors dit que f_n se comporte presque comme un revêtement ramifié de degré a_n. On a une inégalité de Riemann-Hurwitz sur les caractéristiques d'Euler.

* L'auteur remercie chaleureusement A. Eremenko pour ses remarques sur une version préliminaire de ce texte.

Inégalité asymptotique. $\chi(\Sigma_n) \lesssim a_n \chi(\Sigma)$.

Une version relative de cette inégalité donne le théorème des îles, qui est le pendant géométrique de la théorie de Nevanlinna de distribution des valeurs. On suppose ici que Σ_n est un disque et Σ la sphère de Riemann. Fixons trois disques topologiques disjoints dans Σ et appelons *île* toute composante connexe de la préimage par f_n d'un de ces disques sur laquelle f_n est propre. Soit i_n le nombre total d'îles au-dessus des disques.

Théorème des îles. $i_n \gtrsim a_n$.

En particulier une telle suite ne peut éviter trois points distincts. Par un argument longueur-aire (voir plus bas) Ahlfors en déduit le théorème de Picard, l'absence d'application entière non constante à valeurs dans la sphère de Riemann privée de trois points. De la même manière l'inégalité asymptotique donne l'absence d'application entière non constante à valeurs dans Σ si $\chi(\Sigma) < 0$.

On va voir que ces deux résultats proviennent du fait que f_n se comporte vraiment comme un revêtement non ramifié de degré a_n au-dessus d'un graphe Γ dans Σ, quitte à le perturber un peu.

Égalité asymptotique. $\chi(f_n^{-1}(\Gamma)) \sim a_n \chi(\Gamma)$.

Ici Γ est une réunion finie d'arcs γ se coupant transversalement. La perturbation (dépendant de n) s'obtient en déplaçant un peu les arcs parallèlement à eux-mêmes. La préimage $f_n^{-1}(\gamma)$ d'un arc évitant les valeurs critiques de f_n se scinde en *bons arcs* (ceux se projetant homéomorphiquement via f_n sur γ) et en *mauvais arcs* (ceux rencontrant le bord $\partial\Sigma_n$). L'égalité asymptotique résulte du fait suivant.

Fait. *Après perturbation $f_n^{-1}(\gamma)$ contient $\sim a_n$ bons arcs et $o(a_n)$ mauvais arcs.*

Pour ceci paramétrons un voisinage de γ par un rectangle fin horizontal R du plan. Les perturbations de γ apparaissent comme des segments horizontaux $\gamma_t = \pi^{-1}(t)$ où π est la projection sur l'axe vertical. Le nombre de mauvais arcs au-dessus de γ_t est estimé par le nombre de points de $f_n(\partial\Sigma_n)$ dans γ_t. Or $\int \mathrm{card}(f_n(\partial\Sigma_n) \cap \gamma_t)dt = \mathrm{long}(\pi(f_n(\partial\Sigma_n) \cap R))$ où la longueur est comptée avec multiplicité. Cette intégrale est donc contrôlée par l_n et on peut trouver une perturbation γ_{t_n} avec $o(a_n)$ mauvais arcs. Par le lemme de Sard on peut même supposer γ_{t_n} transverse à $f_n(\partial\Sigma_n)$.

Regardons les bons arcs au-dessus de γ_{t_n}. Rappelons que $d_n(p) = \mathrm{card}(f_n^{-1}(p))$. Soit β une 1-forme à support compact dans R ne dépendant que de la variable horizontale et d'intégrale 1 sur γ_t. On va voir que $\int_{\gamma_{t_n}} d_n\beta \sim a_n$. Cela suffit car ainsi $d_n \gtrsim a_n$ en un point de γ_{t_n}. Les mauvais arcs étant peu

nombreux, on a donc $\gtrsim a_n$ bons arcs au-dessus de γ_{t_n}, puis $\sim a_n$ par l'estimée intégrale. Montrons-la. Soit $\delta(t)$ une fonction positive ou nulle d'intégrale 1 à support compact et $\delta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\delta \circ h_\epsilon$ l'approximation de l'unité correspondante en t_n (h_ϵ est la dilatation centrée en t_n de rapport $\frac{1}{\epsilon}$). On a $\beta \wedge \delta_\epsilon dt - \omega = d\alpha_\epsilon$ où α_ϵ est une 1-forme *uniformément bornée*. Par exemple $\alpha_\epsilon = \alpha + (\phi - \phi \circ h_\epsilon)\beta$ où ϕ est une primitive de δ et $d\alpha = \beta \wedge \delta dt - \omega$. Donc $\int(\int_{\gamma_t} d_n\beta)\delta_\epsilon dt - a_n$ est contrôlée uniformément par l_n. Comme $t \to \int_{\gamma_t} d_n\beta$ est continue en t_n (par transversalité de γ_{t_n} au bord), l'estimée s'obtient par passage à la limite en ϵ.

Ceci entraîne l'égalité asymptotique. Par le fait il suffit de voir que $\chi(\Gamma_n) \sim a_n\chi(\Gamma)$ si Γ_n s'obtient de $f_n^{-1}(\Gamma)$ en supprimant les mauvais arcs (après perturbation). Maintenant $\chi(\Gamma) = e - v$ où e est le nombre d'arcs et v le nombre d'intersections dans Γ. Le nombre d'arcs de Γ_n est $\sim a_n e$. De plus chaque intersection p de deux arcs γ, γ' de Γ produit $\sim a_n$ intersections dans Γ_n. En effet il y a $\sim 2a_n$ bons arcs au-dessus de γ et γ' mais seulement $\sim a_n$ points au-dessus de p. Donc $\chi(\Gamma_n) \sim a_n(e - v) = a_n\chi(\Gamma)$.

Pour le théorème des îles. Voici comment le déduire. On place un graphe Γ en forme de figure huit dans la sphère de Riemann de sorte que chacune des composantes connexes du complémentaire de Γ contienne un des disques topologiques. Par l'égalité asymptotique (notations ci-dessus) $\chi(\Gamma_n) \sim -a_n$ car $\chi(\Gamma) = -1$. Le complémentaire de Γ_n dans le disque Σ_n consiste en une composante connexe C_0 touchant le bord et un certain nombre de composantes connexes C à l'intérieur de Σ_n. Nécessairement $\chi(C_0) \leq 0$ et $\chi(C) \leq 1$ car C_0 a au moins deux composantes de bord et C une. Par ailleurs, par construction chaque composante C contient une île. En effet $f_n(\partial C) \subset \Gamma$, donc $f_n(C)$ couvre une composante du complémentaire de Γ par le principe du maximum. L'égalité en caractéristique d'Euler $\chi(\Sigma_n) = \chi(C_0) + \chi(\Gamma_n) + \sum \chi(C)$ donne $1 \lesssim -a_n + i_n$.

Pour l'inégalité asymptotique. Elle suit le même schéma. On prend pour Γ une dissection de Σ, i.e. un bouquet de $2g$ cercles (si g est le genre de Σ) dont le complémentaire est un disque topologique. On a $\chi(\Sigma) = \chi(\Gamma) + 1$. On construit Γ_n, les composantes C_0 touchant $\partial\Sigma_n$ et C comme plus haut. Par l'égalité asymptotique $\chi(\Gamma_n) \sim a_n\chi(\Gamma)$. Par ailleurs le nombre de composantes C est au plus a_n. En effet une telle composante se projette proprement sur le disque donc $\int_C f_n^*\omega = \deg(f_n|_C) \geq 1$. L'égalité en caractéristique d'Euler donne $\chi(\Sigma_n) \leq \chi(\Gamma_n) + \sum \chi(C) \lesssim a_n\chi(\Gamma) + a_n = a_n\chi(\Sigma)$.

Ramifications. On peut y ajouter un terme de ramification. La formule de Riemann-Hurwitz pour $f_n|_C$ donne $\chi(C) + \mathrm{ram}(f_n|_C) = \deg(f_n|_C)$. Soit $r_n =$

$\sum \mathrm{ram}(f_n|_C)$. C'est la ramification significative, celle loin du bord $\partial\Sigma_n$. Comme plus haut $\sum \deg(f_n|_C) \leq a_n$. Donc $\chi(\Sigma_n) + r_n \lesssim a_n\chi(\Sigma)$.

Argument longueur-aire. Rappelons au passage comment une application entière non constante $f : \mathbf{C} \to \Sigma$ produit une suite de disques concentriques dans $\mathbf{C}$ satisfaisant l'hypothèse. On note $h|dz|$ la pseudométrique induite par f sur $\mathbf{C}$, $a(r)$ l'aire du disque centré en 0 de rayon r et $l(r)$ la longueur de son bord. En coordonnées polaires $a' = \int_0^{2\pi} h^2 r d\theta$ et $l = \int_0^{2\pi} h r d\theta$. Par Cauchy–Schwarz $l^2 \leq 2\pi r a'$. Donc $\int_1^\infty (\frac{l}{a})^2 \frac{dr}{r} \leq \frac{2\pi}{a(1)} < +\infty$. On en déduit bien une suite r_n telle que $l(r_n) = o(a(r_n))$.

Cas relatif. Terminons par une version relative de l'inégalité asymptotique. Soit $f_n : \Sigma_n \to \Sigma$ une suite d'applications holomorphes non constantes entre deux surfaces de Riemann compactes connexes à bord. On munit Σ d'une métrique d'aire totale 1 induisant une pseudométrique sur Σ_n. On suppose la longueur l_n de son bord relatif $\partial\Sigma_n \setminus f_n^{-1}(\partial\Sigma)$ négligeable devant son aire a_n. Alors $\chi(\Sigma_n) \lesssim a_n\chi(\Sigma)$. La démonstration est identique. On remarque encore que $\int_{\Sigma_n} f_n^*\theta \sim a_n$ si θ est une 2-forme sur Σ d'intégrale 1. En effet une 2-forme d'intégrale nulle sur Σ possède une primitive nulle sur $\partial\Sigma$. Puis on établit une égalité asymptotique de la forme $\chi(\Gamma_n) \sim a_n\chi(\Gamma)$ pour un graphe Γ dans Σ disjoint de $\partial\Sigma$. Enfin on applique celle-ci à un bouquet de $2g + b - 1$ cercles Γ sur lequel Σ se rétracte (si g est le genre de Σ et b le nombre de composantes de son bord). On obtient $\chi(\Sigma_n) \leq \chi(\Gamma_n) \sim a_n\chi(\Gamma) = a_n\chi(\Sigma)$.

Références

[Th] H. de Thélin, Une démonstration du théorème de recouvrement des surfaces d'Ahlfors, *Enseign.Math.* **51** (2005), 203–209. Zbl 1125.30027

[Ne] R. Nevanlinna, *Analytic functions*, Grund. Math. Wiss. 162, Springer (1970), Berlin. Zbl 0199.12501 MR 0279280

[Re] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progr. Math. 77, Birkhäuser (1989) Boston. Zbl 0689.30001 MR 1034955

(*Reçu le 4 novembre 2013*)

Julien Duval, Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France

e-mail: julien.duval@math.u-psud.fr

© Fondation L'Enseignement Mathématique