**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 47 (2001)
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV
**Autor:** Louvet, Nicolas
**Kapitel:** 4.5. PROPOSITION. On conserve les notations précédentes.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-65439

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

On a

$$\varphi_t = \int_{\mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta)$$
$$= \mu_t(\mathcal{W})\varphi_t^{\mathcal{W}} + (1 - \mu_t(\mathcal{W}))\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} .$$

En posant $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W})$, on obtient

$$\frac{\varphi_t - 1}{t} = \frac{\lambda_t \varphi_t^{\mathcal{W}} + (1-\lambda_t)\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} = \frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} + \frac{1-\lambda_t}{t}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t{}^{\mathcal{W}}\right) . \tag{4.3}$$

4.5. PROPOSITION. *On conserve les notations précédentes.*

(i) $\lim_{t\to 0} \lambda_t = 1$ ;

(ii) $\lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ *uniformément sur tout compact;*

(iii) *pour tout* $t > 0$, $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ *est limite uniforme sur tout compact de combinaisons convexes d'éléments de* $\mathcal{V}$.

*De plus, pour une sous-suite de* $\varphi_t$ *que l'on indexe encore par* $t$,

(iv) *il existe une fonction* $\varphi_0 \in E_0(G)$, $\varphi_0 \not\equiv 1$ *telle que* $\lim_{t\to 0} \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$ *pour la topologie* $*$*-faible;*

(v) *il existe un nombre réel positif* $\lambda$ *tel que* $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda$.

Afin de démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. *Soit* $K$ *un compact convexe dans un espace métrisable. Soient* $\varphi \in \operatorname{ex} K$ *un point extrémal de* $K$ *et* $\varphi_t$ *une suite d'éléments de* $K$ *telle que* $\lim_{t\to 0} \varphi_t = \varphi$. *Pour chaque* $t$, *on se donne une décomposition de Choquet*

$$\varphi_t = \int_K \eta \, d\mu_t(\eta)$$

*où* $\mu_t$ *est une mesure de probabilité supportée par* $\operatorname{ex} K$. *Alors, pour tout voisinage* $\mathcal{W}$ *de* $\varphi$ *dans* $K$, *on a*

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} K) = 1 .$$

*Preuve.* L'ensemble $\mathcal{M}(K)$ des mesures de probabilité sur $K$ est compact pour la topologie faible. Il existe donc une sous-suite $\mu_{t_k}$ de $\mu_t$ qui converge

faiblement sur $K$ vers une mesure $\mu$. La suite $\varphi_t$ converge vers $\varphi$ qui est un point extrémal, donc

$$\varphi = \int_{\operatorname{ex} K} \eta \, d\mu(\eta)$$

et la mesure $\mu$ coïncide avec la mesure de Dirac $\delta_\varphi$ au point $\varphi$ (Proposition 26.3 de [Cho]). De plus, toute sous-suite convergente de $(\mu_t)$ admet $\delta_\varphi$ comme limite. Autrement dit, $\delta_\varphi$ est l'unique point adhérent de la suite $(\mu_t)$ et $\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1$ pour tout voisinage $\mathcal{W}$ contenant $\varphi$. La mesure $\mu_t$ est supportée par $\operatorname{ex} K$, donc

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} K) = 1$$

comme annoncé. $\square$

*Preuve de (i).* C'est une conséquence du lemme ci-dessus. En effet,

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = \lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} E_0(G)) = 1 \,.$$

*Preuve de (ii).* Les fonctions $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ et la fonction constante 1 appartiennent à l'ensemble $E(G)$ sur lequel les topologies $*$-faible et de la convergence compacte coïncident. Il suffit donc de montrer que $\lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$. Pour $f \in \mathrm{L}^1(G)$, on a

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{\mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta)$$

et

$$\lim_{t\to 0} \langle \varphi_t, f \rangle = \langle 1, f \rangle \,.$$

Le lemme implique que

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} \mu_t(E_0(G)\setminus \mathcal{W}) = 0 \,,$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \langle \varphi_t^{\mathcal{W}}, f \rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \Big( \langle \varphi_t, f \rangle - \int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta) \Big) = \langle 1, f \rangle \,.$$

*Preuve de (iii).* Pour une partie $A$ de $E_0(G)$, on désigne par $\overline{A}$ l'adhérence de $A$ dans $E_0(G)$ pour la topologie $*$-faible et $\operatorname{co} A$ son enveloppe convexe. Posons

$$K_{\mathcal{W}} := \overline{\operatorname{co}(\mathcal{W} \cap P(G))}$$

et considérons la mesure $\mu_t^{\mathcal{W}}$, supportée par $\mathcal{W} \cap P(G)$, donnée par

$$\mu_t^{\mathcal{W}}(A) = \frac{\mu_t(A \cap \mathcal{W})}{\mu_t(\mathcal{W})} \qquad \text{pour } A \subset E_0(G)\,.$$

Ceci détermine une mesure de probabilité sur le compact convexe $K_{\mathcal{W}}$ telle que

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \int_{K_{\mathcal{W}}} \eta \, d\mu_t^{\mathcal{W}}(\eta)\,.$$

La proposition 26.3 de [Cho] implique que $\varphi_t^{\mathcal{W}} \in K_{\mathcal{W}}$. Autrement dit, la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit comme limite pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Or $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ appartient à $E(G)$ et $\mathrm{co}(\mathcal{W} \cap P(G)) \subset E(G)$ sur lequel les topologies de la convergence compacte et $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ coïncident, donc la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit aussi comme limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$.

*Preuve de (iv).* Comme la suite $(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}})$ est contenue dans $E_0(G)$ qui est compact pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, il existe une sous-suite, encore indexée par $t$, et un élément $\varphi_0 \in E_0(G)$ tel que

$$\lim_{t \to 0} \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$$

pour la topologie faible $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

Supposons que $\varphi_0 \equiv 1$. En particulier, on peut supposer que les fonctions $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$ qui apparaissent dans la sous-suite considérée sont toutes non nulles. Considérons la mesure $\widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}$ définie par

$$\widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}(A) = \frac{\mu_t(A \cap (E_0(G) \backslash \mathcal{W}))}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \qquad \text{pour } A \subset E_0(G)\,.$$

Cette mesure est supportée par $(E_0(G) \backslash \mathcal{W}) \cap P(G)$, et donne pour tout $t$ une décomposition de Choquet de $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$.

Puisque $\varphi_0 \equiv 1$ est un point extrémal, la mesure de probabilité $\mu_0$ qui donne une décomposition de Choquet de $\varphi_0$ est la mesure de Dirac en 1 et vérifie

$$\mu_0 = \lim_{t \to 0} \widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}\,.$$

Par conséquent,

$$1 = \mu_0(\mathcal{W}) = \lim_{t \to 0} \widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}(\mathcal{W}) = 0\,,$$

ce qui est absurde.

*Preuve de (v).* Montrons d'abord qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\frac{1-\lambda_t}{t}$ soit borné pour $0 < t < t_0$.

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, quitte à extraire une sous-suite que l'on indexe encore par $t$, on peut supposer que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty .$$

Choisissons un $g_0 \in G$ tel que $\varphi_0(g_0) \neq 1$ et un voisinage ouvert relativement compact $\mathcal{U}$ de $g_0$ dans $G$ tel que

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(g) - 1) < 0 \qquad \text{pour tout } g \in \mathcal{U}$$

et une fonction $f \in \mathrm{L}^1(G)$, non nulle, positive et telle que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$. L'équation (4.3) donne

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f\right\rangle + \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right)\left\langle \operatorname{Re}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right), f\right\rangle .$$

Grâce au choix de $f$, on a

$$\lim_{t\to 0}\left\langle \operatorname{Re}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right), f\right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\varphi_0 - 1\right), f\right\rangle < 0$$

et

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f\right\rangle \leq 0 .$$

Puisque $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty$, grâce à (4.2) on a

$$\left\langle \operatorname{Re}\psi, f\right\rangle = \lim_{t\to 0}\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\right\rangle = -\infty .$$

Comme $\psi$ est continue et $f$ est à support relativement compact, ceci mène à une contradiction. On peut donc supposer, quitte à passer à une sous-suite, que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda ,$$

avec $\lambda \geq 0$ car $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W}) \leq 1$.

Ceci termine la preuve de la proposition 4.5. $\square$

## 4.6 Constructions GNS

Fixons $g \in G$. En utilisant (3.1) et (4.2), on a

$$\left\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\right\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\varphi_t(g^{-1}xg) - \varphi_t(g^{-1}x) - \varphi_t(xg) + \varphi_t(x)\right\}$$

uniformément pour $x$ parcourant les ensembles compacts de $G$.