Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV
Autor: Louvet, Nicolas
Kapitel: 3.3 Construction GNS
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65439

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\mathcal{W}(\varphi;\varepsilon,K) = \left\{\psi \in \mathrm{L}^\infty(G) \ : \ \sup_{g\in K} |\varphi(g) - \psi(g)| < \varepsilon\right\}$$

où ε est un nombre strictement positif et K une partie compacte du groupe G.

La topologie de la convergence compacte est plus forte que la topologie $*$-faible. En général, ces deux topologies sont différentes. Pour le voir, on considère les fonctions f_n sur le groupe additif $\mathbf{R}$ qui sont linéaires par morceaux, valent zéro sur $]-\infty,0]$ et 1 sur $[\frac{1}{n},+\infty[$. Pour la topologie faible, ces fonctions convergent vers la fonction caractéristique de $]0,+\infty[$ alors qu'elles ne convergent pas uniformément sur les parties compactes.

L'ensemble $E_0(G)$ est fermé pour ces deux topologies, il est compact pour la topologie $*$-faible mais en général pas pour la topologie de la convergence compacte. Pour le voir, on considère le tore $G = S^1$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le caractère

$$\chi_n \colon S^1 \longrightarrow \mathbf{C} \colon z \longmapsto z^{-n}$$

pour $z = e^{2\pi i t} \in S^1$. Cette suite de fonctions de type positif converge vers la fonction nulle pour la topologie $*$-faible : pour $f \in \mathrm{L}^1(S^1)$, $\langle \chi_n, f\rangle$ coïncide avec le coefficient de Fourier $\widehat{f}(n)$ de f au point n qui tend vers zéro pour n tendant vers l'infini. A l'opposé, aucune sous-suite de (χ_n) ne peut converger uniformément vers zéro car $\sup_{z\in S^1} |\chi_n(z)| = 1$.

On note $E(G)$ l'ensemble des *états* de G : il s'agit des fonctions φ de type positif sur G pour lesquelles $\varphi(e) = 1$. Raikov a montré que, sur $E(G)$, les deux topologies décrites ci-dessus coïncident (voir [Rai] ou le théorème 13.5.2 de [Dix]). Pour un groupe non-discret, l'ensemble des états n'est en général pas fermé pour la topologie $*$-faible. En effet, les caractères du tore décrits ci-dessus sont des états du groupe S^1 mais leur limite pour la topologie $*$-faible vaut zéro au neutre.

Si $\operatorname{ex} E_0(G)$ désigne l'ensemble des points extrémaux du convexe $E_0(G)$, on note $P(G) = (\operatorname{ex} E_0(G)) \setminus \{0\}$ et on observe que $P(G) \subset E(G)$. Les éléments de $P(G)$ s'appellent les *états purs*. Comme $E_0(G)$ est convexe et compact pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, le théorème de Krein-Milman nous dit que $E_0(G)$ est l'enveloppe convexe des états purs et de 0. En particulier, $P(G)$ est non vide.

3.3 Construction GNS

Si $\pi \colon G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire de G et $\xi \in \mathcal{H}$, alors la fonction $\varphi(g) = \langle \pi(g)\xi \mid \xi\rangle$ est une fonction de type positif sur G telle que $\varphi(e) = \|\xi\|^2$. Une telle fonction est dite *associée* à la représentation π. Réciproquement, pour toute fonction φ non-nulle de type positif, il existe un triple $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ où $\pi_\varphi \colon G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\varphi)$ est une représentation unitaire de G

et $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ est un vecteur de norme $\sqrt{\varphi(e)}$ tels que l'orbite de ξ_φ sous l'action de $\pi_\varphi(G)$ est totale dans $\mathcal{H}_\varphi$ et, pour tout $g \in G$, on a

$$\varphi(g) = \langle \pi_\varphi(g)\, \xi_\varphi \mid \xi_\varphi \rangle .$$

Un tel triple est appelé *triple GNS* associé à φ. Il est unique à isomorphisme près. Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f\colon G \to \mathbf{C}$ de support fini alors $\mathcal{H}_\varphi$ est l'espace de Hilbert obtenu en séparant et complétant V pour la forme sesquilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x)\, \overline{h(y)}\, \varphi(y^{-1}x) .$$

Cette construction possède les propriétés suivantes :

(1) si φ, ψ et χ sont trois fonctions de type positif telles que $\psi = \varphi + \chi$ alors la représentation π_φ est une sous-représentation de π_ψ ;

(2) la fonction de type positif φ est pure si et seulement si la représentation π_φ est irréductible ;

(3) si $\varphi \equiv 1$ alors $\pi_\varphi = 1_G$;

(4) si φ est une fonction de type positif associée à une représentation π alors la représentation π_φ qu'on associe à φ par construction GNS est une sous-représentation de π.

3.4 Topologie sur le dual

Considérons la topologie de Fell (inner hull-kernel topology) sur l'ensemble Rep(G) des (classes d'équivalence de) représentations unitaires du groupe localement compact G. Cette topologie est définie comme ceci. Soient π une représentation, $\varepsilon > 0$, K un ensemble compact de G, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des fonctions de type positif associées à π. On note $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ l'ensemble des représentations $\rho \in \mathcal{S}$ pour lesquelles il existe des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n$, chacune étant une somme de fonctions de type positif associées à ρ, telles que

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \forall\, x \in K .$$

Les sous-ensembles du type $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ forment un système fondamental de voisinages de la représentation π dans Rep(G) (voir [Fel2], Section 2).

Cette topologie peut aussi être décrite en termes de contenance faible : la représentation π est *faiblement contenue* dans un ensemble $\mathcal{S}$ de représentations de G si toute fonction de type positif associée à π est limite,