Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV
Autor: Louvet, Nicolas
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65439

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 47 (2001), p. 287–314

A PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV

par Nicolas LOUVET *)

RÉSUMÉ. On présente et généralise un résultat de Vershik et Karpushev qui établit un lien entre la 1-cohomologie des représentations unitaires d'un groupe G et la topologie de Fell au voisinage de la représentation triviale du groupe.

1. INTRODUCTION

Considérons un groupe localement compact G et une représentation continue π de G par des opérateurs unitaires sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, c'est-à-dire un morphisme π de G dans le groupe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ des opérateurs unitaires de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tel que l'application $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}\colon (g, \xi) \mapsto \pi(g)\,\xi$ soit continue. On note $\mathrm{Z}^1(G, \pi)$ l'espace vectoriel des *cocycles* continus de G à coefficients dans π, c'est-à-dire des applications continues $b\colon G \to \mathcal{H}$ telles que

$$b(xy) = b(x) + \pi(x)\,b(y) \qquad \text{pour tous} \quad x,\, y \in G\,.$$

On désigne par $\mathrm{B}^1(G, \pi)$ l'ensemble des *cobords* qui sont les cocycles de la forme

$$b(x) = \pi(x)\,\xi - \xi \qquad \text{pour tout } x \in G\,,$$

où ξ est un vecteur de $\mathcal{H}$. Le *premier groupe de cohomologie* de G à coefficients dans π est le quotient

$$\mathrm{H}^1(G, \pi) = \mathrm{Z}^1(G, \pi)/\mathrm{B}^1(G, \pi)\,.$$

Ce groupe est associé aux actions par isométries affines de G sur $\mathcal{H}$ admettant π comme partie linéaire (voir ci-dessous § 3.5).

*) Financé par la requête 20-56816.99 du Fonds National Suisse pour la Recherche Scientifique.

A défaut de pouvoir décrire explicitement $\mathrm{H}^1(G,\pi)$ pour toutes les représentations d'un groupe donné, ou même de déterminer pour quelles représentations π de G ce groupe est trivial, plusieurs auteurs se sont attachés à donner des interprétations qualitatives de son annulation comme de sa non-annulation. Si l'annulation de $\mathrm{H}^1(G,\pi)$ peut être vue comme un phénomène de rigidité pour la représentation π (voir [Weil], [Sto], [Rag], [LuZi]), la non-annulation de $\mathrm{H}^1(G,\pi)$ possède également une interprétation topologique que nous allons présenter.

L'ensemble $\widehat{G}$ des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles du groupe G dans un espace de Hilbert est muni de la topologie de Fell qui peut être décrite en termes de *contenance faible* (voir ci-dessous §3.4). Le *support* d'une représentation π est l'ensemble $\operatorname{supp}\pi$ des représentations irréductibles de G qui sont faiblement contenues dans π. En général, la topologie de Fell sur $\widehat{G}$ n'est pas séparée. Le *cortex* du groupe G est le sous-ensemble $\operatorname{cor} G$ de $\widehat{G}$ formé des représentations π qui sont non-séparées de la représentation triviale 1_G, c'est-à-dire telles que, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de 1_G et pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de π, l'intersection $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$ est non-vide.

Soit π une représentation de G. Rappelons que π est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$ qui sont $\pi(G)$-invariants sont $\{0\}$ et $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{N}_\pi$ l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\pi(g)$, $g\in G$, c'est-à-dire le bicommutant de $\pi(G)$. La représentation π est dite *factorielle* si l'algèbre de von Neumann $\mathcal{N}_\pi$ est un facteur, c'est à dire si le centre de $\mathcal{N}_\pi$ est réduit aux opérateurs scalaires. Toute représentation unitaire irréductible est factorielle (voir §3.1).

Le but de ce travail est de donner une preuve du théorème suivant (§4).

THÉORÈME. *Soit π une représentation unitaire factorielle d'un groupe localement compact séparable G.*

Si $\mathrm{H}^1(G,\pi)\neq 0$ *alors* $\operatorname{supp}\pi\subset\operatorname{cor} G$.

Ce résultat avait été conjecturé par Guichardet dans [Gui] et partiellement obtenu par Delorme dans [Del]. Vershik et Karpushev l'ont montré pour des représentations irréductibles [VeKa]. Notre preuve reprend l'essentiel des idées de Vershik et Karpushev en précisant certains points, concernant les topologies notamment, et montre que les arguments s'étendent aux cas des représentations unitaires factorielles.

Pour une représentation non-factorielle l'énoncé n'est plus valable. En effet, si π_1 est une représentation factorielle dont la cohomologie est non nulle et π_2 est une représentation n'appartenant pas au cortex, alors la représentation

$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ a un premier groupe de cohomologie non nul mais son support contient π_2 et n'est donc pas contenu dans le cortex.

Le cortex est un sous-ensemble fermé de $\widehat{G}$. Nous avons préféré ici la définition du cortex présentée dans [BeKa] à celle donnée dans [VeKa]. Avec la définition choisie, 1_G appartient toujours au cortex. Nous donnons au §2 des exemples de groupes pour lesquels nous décrivons brièvement la 1-cohomologie des représentations irréductibles ainsi que le cortex. Pour des études détaillées du cortex de certains groupes, on pourra également consulter [BeKa] et [BLM].

REMERCIEMENTS. Je tiens à remercier Bachir Bekka qui a relevé une lacune dans la preuve originale de Vershik et Karpushev et m'a communiqué des notes manuscrites sur le sujet. Je remercie Pierre de la Harpe avec qui j'ai eu de nombreuses discussions fructueuses sur le sujet. Je les remercie tous deux, ainsi qu'Alain Valette, pour les conseils et suggestions qu'ils m'ont donnés lors de la rédaction de cet article.

2. EXEMPLES

Pour les exemples 2 et 3, on trouvera une description de la topologie du dual unitaire dans [War2, §7.1] ou [Fel2].

EXEMPLE 1 : GROUPE ABÉLIEN

Si G est un groupe abélien, alors la topologie de Fell sur $\widehat{G}$ est séparée. Le cortex de G est réduit à $\{1_G\}$. Si χ est un caractère non-trivial de G, alors $\mathrm{H}^1(G,\chi) = 0$. Pour la représentation triviale, $\mathrm{H}^1(G, 1_G)$ coïncide avec le groupe des morphismes additifs

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}) = \{f\colon G \to \mathbf{C} \mid f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in G\}.$$

EXEMPLE 2 : LE GROUPE "$ax + b$"

Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbf{R},\ a > 0 \right\}$$

le groupe des transformations affines de la droite réelle préservant l'orientation. On a une identification canonique $G = \mathbf{R}_+^* \ltimes \mathbf{R}$ et on note respectivement A et B les sous-groupes $\{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}_+^*\}$ et $\{(1, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$.

Les représentations irréductibles de G sont d'une part les caractères de A étendus trivialement à G :

$$\chi_s \colon G \longrightarrow \mathbf{C} \colon (a,b) \longmapsto e^{is\log a}$$

pour $s \in \mathbf{R}$. D'autre part, pour $r \neq 0$, on a les représentations $\pi_r = \mathrm{Ind}_B^G \sigma_r$ induites des caractères

$$\sigma_r \colon B \longrightarrow \mathbf{C} \colon (0,b) \longmapsto e^{irb}.$$

En fait, π_r est équivalente à $\pi_+ := \pi_{+2\pi}$ ou $\pi_- := \pi_{-2\pi}$ suivant le signe de r. Les représentations $\pi_\pm$ agissent sur $\mathcal{H}_\pm = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}_+^*)$, où $\mathbf{R}_+^*$ est muni de la restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}$, et sont données par

$$\left(\pi_\pm(a,b)\,\xi\right)(x) = a^{-\frac{1}{2}} e^{\pm 2\pi i\left(\frac{b}{x}\right)} \xi\left(\frac{x}{a}\right),$$

pour $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}_+^*)$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $(a,b) \in G$.

La topologie sur $\widehat{G} = \mathbf{R} \cup \{\pi_+\} \cup \{\pi_-\}$ peut être décrite comme la topologie quotient sur $\mathbf{R}^2/\mathcal{R}$ où $\mathbf{R}^2$ est muni de la topologie naturelle et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence donnée par

$$(s,r)\ \mathcal{R}\ (s',r') \Longleftrightarrow (r \text{ et } r' > 0) \text{ ou } (r \text{ et } r' < 0) \text{ ou } (r = r' = 0 \text{ et } s = s').$$

En particulier, les représentations π_+ et π_- sont des points ouverts de $\widehat{G}$ et contiennent faiblement tous les caractères χ_s.

Le cortex de G coïncide avec l'ensemble de toutes les représentations irréductibles de G. Par ailleurs, les seules représentations irréductibles qui possèdent une 1-cohomologie non-triviale sont 1_G, π_+ et π_- (voir [Gui2], § 9).

EXEMPLE 3 : LE GROUPE DE HEISENBERG

Soit $G = H_n$ le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$. Il s'agit de $G = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ avec la multiplication donnée par

$$(x,y,z)(x',y',z') := (x+x', y+y', z+z' + \tfrac{1}{2}(\langle x,y'\rangle - \langle y,x'\rangle))$$

pour $x, x', y, y' \in \mathbf{R}^n$ et $z, z' \in \mathbf{R}$ où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$.

Les représentations irréductibles de G sont d'une part les caractères de $\mathbf{R}^{2n}$ étendus à G :

$$\sigma_{(a,b)} \colon G \longrightarrow \mathbf{C} \colon (x,y,z) \longmapsto e^{i(\langle a,x\rangle + \langle b,y\rangle)}$$

pour $a, b \in \mathbf{R}^n$. D'autre part, on a les représentations de Schrödinger ρ_h, pour $h \in \mathbf{R}^*$. Si N désigne le sous-groupe $\{(0,y,z); y \in \mathbf{R}^n, z \in \mathbf{R}\}$ de G, les représentations ρ_h sont les représentations induites $\mathrm{Ind}_N^G \chi_h$ des caractères

$$\chi_h : N \longrightarrow \mathbf{C} : (0, y, z) \longmapsto e^{ihz}.$$

Pour $h \in \mathbf{R}^*$, les représentations ρ_h agissent sur l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ et sont données par

$$(\rho_h(x, y, z)\xi)(t) = e^{ih(z+\langle y,t\rangle+\frac{1}{2}\langle x,y\rangle)}\xi(t+x)$$

pour $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, pour tout $t \in \mathbf{R}^n$.

La topologie sur $\widehat{G} = \mathbf{R}^{2n} \cup \mathbf{R}^*$ peut être décrite comme la topologie quotient de $\mathbf{R}^{2n+1}/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^{2n+1}$ donnée par

$$(a, b, h)\ \mathcal{R}\ (a', b', h') \Longleftrightarrow (h = h' \neq 0) \text{ ou } (h = h' = 0 \text{ et } (a, b) = (a', b')).$$

Donc, pour h tendant vers zero, les représentations ρ_h approchent simultanément tous les caractères.

Le cortex de G est constitué des caractères $\sigma_{(a,b)}$, avec $a, b \in \mathbf{R}^n$. Par ailleurs, la seule représentation irréductible qui possède une 1-cohomologie non-triviale est 1_G ([Gui2], § 8, corollaire 5).

EXEMPLE 4 : GROUPE DES DÉPLACEMENTS

Soit $G = \mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbf{R}^n$ agissant sur l'espace $\mathbf{R}^n$ par

$$(A, v)x = Ax + v$$

où $A \in \mathrm{SO}(n)$ et $v, x \in \mathbf{R}^n$.

Si $n = 2$, les représentations irréductibles de G sont, d'une part, les représentations π_z, $z \in \mathbf{Z}$, de dimension un du groupe $\mathrm{SO}(2) \cong S^1$ étendues trivialement à G :

$$\pi_z : G \longrightarrow \mathbf{C} : (A(\theta), v) \longmapsto e^{iz\theta}$$

où $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $v \in \mathbf{R}^2$. D'autre part, on a les représentations $\rho_u = \mathrm{Ind}_{\mathbf{R}^2}^G \chi_u$, $u \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, induites des caractères

$$\chi_u : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C} : v \longmapsto e^{i\langle u,v\rangle}$$

du sous-groupe normal $\mathbf{R}^2$. Si u et u' sont sur un même cercle de $\mathbf{R}^2$ (en fait, sur une même orbite de $\mathrm{SO}(2)$) alors ρ_u et $\rho_{u'}$ sont équivalentes (voir [Mac], § 3.9). Si $r > 0$ est le rayon du cercle correspondant, on note ρ_r leur classe d'équivalence.

Si r tend vers zéro, alors ρ_r tend vers la représentation quasi-régulière de G sur $\mathrm{L}^2(G/\mathbf{R}^2) \cong \mathrm{L}^2(\mathrm{SO}(2))$. Cette dernière contient toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(2)$. Le cortex de G est ainsi constitué de tous les caractères $\pi_z \in \widehat{\mathrm{SO}(2)}$.

On a deux représentations de dimension un de cohomologie non triviale

$$\pi_\pm \colon \mathrm{SO}(2) \longrightarrow \mathbf{C} \colon A(\theta) \longmapsto e^{\pm i\theta}$$

pour lesquelles un cocycle non trivial est donné par

$$b_\pm(A(\theta), (v_1, v_2)) = v_1 \pm i\, v_2$$

pour $(v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$ (voir [Gui2], §9, exemple 2).

Si $n \geq 3$, on considère l'action naturelle de $\mathrm{SO}(n)$ sur le dual de $\mathbf{R}^n$ et on désigne par K_u le stabilisateur d'un caractère χ_u de $\mathbf{R}^n$. Si $u \neq 0$, K_u est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(n)$ conjugué à $\mathrm{SO}(n-1)$. On obtient toutes les représentations irréductibles de G en considérant, d'une part, les représentations de dimension finie du groupe compact $\mathrm{SO}(n)$ étendues trivialement à G, et, d'autre part, les représentations

$$\rho_{\sigma,u} = \mathrm{Ind}_{K_u \ltimes \mathbf{R}^2}^{G}(\sigma \otimes \chi_u)$$

induites du sous-groupe $\mathrm{SO}(n-1) \ltimes \mathbf{R}^n$ où $\sigma \in \widehat{K_u}$ (voir [Mac]).

On a

$$\mathrm{cor}\, G = \{\pi \in \widehat{\mathrm{SO}(n)} \mid \pi \subset \mathrm{Ind}_{\mathrm{SO}(n-1)}^{\mathrm{SO}(n)} 1_{\mathrm{SO}(n-1)}\}\,.$$

En particulier, le cortex de G coïncide avec $\widehat{\mathrm{SO}(3)}$ pour $n = 3$ mais est un sous-ensemble strict de $\widehat{\mathrm{SO}(n)}$ pour pour $n \geq 4$ (voir [BeKa], exemple 2.10).

La seule représentation irréductible de cohomologie non triviale est de dimension n, donnée par la complexifiée de l'action naturelle de $\mathrm{SO}(n)$ sur $\mathbf{R}^n$. Cela est dû au fait que l'espace $\mathbf{R}^n$ n'admet pas de structure complexe invariante pour l'action naturelle de $\mathrm{SO}(n)$. (Voir [Gui2], §9, exemple 2.) Un 1-cocycle non-trivial est donné par $b(A, v) = v$ pour $(A, v) \in G$.

Exemple 5 : groupes d'isométries hyperboliques

Soit $G = \mathrm{SO}_0(n, 1)$ la composante connexe du groupe des matrices $(n+1) \times (n+1)$ réelles qui préservent la forme quadratique sur $\mathbf{R}^{n+1}$ donnée par

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2\,.$$

Soit $G = \mathrm{SU}(n, 1)$ le groupe des matrices $(n+1) \times (n+1)$ complexes qui préservent la forme hermitienne sur $\mathbf{C}^{n+1}$ donnée par

$$|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 - |x_{n+1}|^2 .$$

Delorme a montré que si $G = \mathrm{SO}_0(n,1)$, $n \geq 3$, alors il existe exactement une représentation dont la cohomologie est non triviale; et si $G = \mathrm{SU}(n,1)$, $n \geq 1$ ou $G = \mathrm{SO}_0(2,1) \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ alors il existe exactement deux représentations, conjuguées l'une de l'autre, dont la cohomologie est non triviale (pour tout ceci, voir [Del]).

Bekka et Kaniuth ont montré que le cortex des groupes de Lie semi-simples à centres finis est toujours fini [BeKa]. De plus, on sait que le cortex de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ est constitué de la représentation triviale et des deux représentations dont la 1-cohomologie est non nulle [Mil].

Exemple 6 : groupes de Kazhdan

Un groupe localement compact G possède la *propriété (T) de Kazhdan* si la représentation 1_G est un point isolé dans $\widehat{G}$ pour la topologie de Fell. Les groupes qui possèdent la propriété (T) sont aussi appellés *groupes de Kazhdan*.

Il résulte des définitions que si G possède la propriété (T) alors le cortex de G est réduit à $\{1_G\}$. En appliquant le théorème de Vershik et Karpushev, on voit que si G est un groupe de Kazhdan alors la 1-cohomologie des représentations factorielles non triviales (en particulier les irréductibles) de G est toujours nulle.

En fait, un résultat dû à Guichardet et Delorme donne une caractérisation de la propriété (T) en terme de 1-cohomologie : le groupe G possède la propriété (T) si et seulement si $\mathrm{H}^1(G,\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire π de G (voir [HaVa], chapitre 4).

Donc, si le groupe G n'a pas la propriété (T), il existe une représentation unitaire pour laquelle $\mathrm{H}^1(G,\pi) \neq 0$. En 1982, Vershik et Karpushev se demandaient si l'on peut toujours trouver une telle représentation parmi les irréductibles. Sous l'hypothèse que le groupe G est engendré par une partie compacte, Y. Shalom a répondu positivement à cette question en montrant que les trois conditions suivantes sont équivalentes [Sha2] :

(i) G possède la propriété (T);

(ii) $\mathrm{H}^1(G,\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire irréductible π ;

(iii) $\overline{\mathrm{H}^1}(G,\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire π où $\overline{\mathrm{H}^1}$ désigne la cohomologie réduite, quotient de l'ensemble des cocycles par l'adhérence des cobords pour la topologie de la convergence compacte.

Remarquons que l'hypothèse de génération compacte est nécessaire. En effet, si G est le groupe additif d'un espace vectoriel de dimension infinie sur le corps à deux éléments, alors G n'a pas la propriété (T) car il est abélien non compact, alors que $\mathrm{H}^1(G,\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire irréductible π.

Des exemples de groupes de Kazhdan sont :

- $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$, pour $n \geq 3$;
- plus généralement, les groupes de Lie réels simples qui ne sont pas localement isomorphes à ceux de l'exemple 5 ;
- les réseaux (sous-groupes discrets de covolume fini) dans de tels groupes, par exemple $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$, pour $n \geq 3$.

Pour des compléments concernant la propriété (T), on pourra se référer à [HaVa].

EXEMPLE 7 : GROUPES LIBRES

Si $\mathbf{F}_2$ désigne le groupe libre sur 2 générateurs, alors $\mathbf{F}_2$ admet une représentation irréductible qui est un point dense dans $\widehat{\mathbf{F}_2}$ (voir [Yosh] ou [Dav], théorème VII.6.5).

Le cortex de $\mathbf{F}_2$ est donc le dual $\widehat{\mathbf{F}_2}$ tout entier. De plus, toute représentation de $\mathbf{F}_2$ admet un premier groupe de cohomologie non-trivial (voir paragraphe 9, exemple 1 de [Gui2]). Ces résultats s'étendent au cas du groupe libre $\mathbf{F}_n$ sur n générateurs.

EXEMPLE 8 : LES GROUPES $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$ ET $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$

Soit G le produit semi-direct $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$ pour l'action naturelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ sur le plan $\mathbf{R}^2$. Montrons que le cortex de G s'identifie à celui de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$.

Soit $\pi \in \widehat{G}$ une représentation du cortex de G. Il existe une suite (π_n) dans $\widehat{G}$ qui converge à la fois vers π et 1_G. Comme la paire $(G,\mathbf{R}^2)$ possède la propriété (T) relative, la restriction de π_n à $\mathbf{R}^2$ admet pour n assez grand des vecteurs invariants non-nuls (voir [HaVa], proposition 2.2). Comme la représentation π_n est irréductible et $\mathbf{R}^2$ est normal dans G, on voit de plus que la restriction $\pi_n|_{\mathbf{R}^2}$ est la représentation identique, de sorte qu'on peut voir π_n comme une représentation de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$. Il en résulte que π est triviale sur $\mathbf{R}^2$, passe au quotient par $\mathbf{R}^2$ et définit une représentation de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, qui est dans le cortex.

Réciproquement, une représentation du cortex de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ définit par relèvement une représentation du cortex de G.

Les mêmes arguments sont valables pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ où $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ désigne le groupe des matrices 2 fois 2 de déterminant un à coefficients entiers agissant naturellement sur le réseau $\mathbf{Z}^2$.

Exemple 9 : réseau dans un groupe de Lie simple

Soit Γ un réseau dans un groupe de Lie simple G non-compact et de centre trivial qui ne possède pas la propriété (T). On note λ_Γ la représentation régulière gauche de Γ sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$ des fonctions de carrés sommables. Nous allons montrer que le cortex de Γ contient le support de λ_Γ.

En effet, le groupe G ne possède pas la propriété (T) et la représentation triviale 1_G est donc limite de représentations irréductibles non-triviales π_n. On peut supposer que ces représentations π_n ne sont pas faiblement contenues dans la représentation régulière λ_G de G car le groupe G n'est pas moyennable. En particulier, les π_n ne sont pas dans la série discrète de G de sorte que les restrictions $\pi_n|_\Gamma$ de π_n à Γ sont encore irréductibles (proposition 2.5 de [CoSt]). Par continuité de la restriction, la représentation triviale 1_Γ est encore limite des $\pi_n|_\Gamma$. De plus, la représentation régulière de Γ est faiblement contenue dans chacune de ces représentations $\pi_n|_\Gamma$ (théorème 1 de [BeHa]). Une représentation π faiblement contenue dans λ_Γ est donc limite de représentations (parmi les $\pi_n|_\Gamma$) qui tendent vers 1_Γ.

Exemple 10 : réseau dans un produit de groupes

Soit Γ un réseau irréductible dans un produit $G = G_1 \times G_2$ de deux groupes de Lie semi-simples sans facteur compact et de centres finis. L'irréductibilité de Γ signifie que, pour chaque $i = 1,2$, l'image de Γ par la projection $p_i \colon G \to G_i$ est dense dans G_i.

Chaque représentation irréductible σ de G_2 définit une représentation irréductible $1 \otimes \sigma$ de $G_1 \times G_2$ puis, par restriction, une représentation $(1 \otimes \sigma)|_\Gamma$ de Γ qui est toujours irréductible car la projection de Γ sur G_2 est dense. On note $\widehat{G_2}|_\Gamma$ le sous-ensemble de $\widehat{\Gamma}$ des représentations de ce type et $\overline{\widehat{G_2}|_\Gamma}$ son adhérence dans $\widehat{\Gamma}$.

Supposons que G_1 possède la propriété (T) et montrons que

$$\operatorname{cor}\Gamma \subset \overline{\widehat{G_2}|_\Gamma}.$$

Une représentation π du cortex de Γ est limite de représentations irréductibles π_n de Γ qui convergent également vers 1_Γ. Grâce au théorème 1 de [BeLo], on peut supposer que les représentations π_n sont de la forme $(1 \otimes \sigma_n)|_\Gamma$ où $\sigma_n \in \widehat{G_2}$. On peut être plus précis : $\pi \in \operatorname{cor}\Gamma$ si et seulement si π est limite de représentations $(1 \otimes \sigma_n)|_\Gamma$ où $\lim \sigma_n = 1_{G_2}$ dans $\widehat{G_2}$.

Concernant la cohomologie de la représentation triviale, le groupe $\mathrm{H}^1(\Gamma, 1_\Gamma)$ coïncide avec le groupe des morphismes additifs de Γ dans $\mathbf{C}$. Un tel morphisme est toujours trivial sur le sous-groupe $[\Gamma, \Gamma]$ des commutateurs et définit donc un morphisme du groupe abélianisé $\Gamma^{\mathrm{ab}} = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ qui est fini dans notre cas (corollaire 2.7 de [LuZi]). Par suite, $\mathrm{H}^1(\Gamma, 1_\Gamma) = 0$. Plus généralement, on a $\mathrm{H}^1(\Gamma, \pi) = 0$ pour toute représentation π de dimension finie de Γ (voir le théorème 3.1 de [LuZi] ou le théorème B de [BeLo] pour une preuve élémentaire utilisant le résultat de Vershik et Karpushev présenté dans cet article).

Supposons de plus que le quotient G/Γ est compact et montrons qu'une représentation irréductible et non-triviale de Γ avec un premier groupe de cohomologie non-nul est forcément de la forme $(1 \otimes \sigma)|_\Gamma$ où σ est une représentation irréductible de G_2 telle que $\mathrm{H}^1(G_2, \sigma) \neq 0$. En effet, si π est une représentation irréductible non-triviale de Γ telle que $\mathrm{H}^1(\Gamma, \pi) \neq 0$, alors, soit π est de la forme désirée (c'est-à-dire $\pi = (1 \otimes \sigma)|_\Gamma$ avec $\mathrm{H}^1(G_2, \sigma) \neq 0$), soit π contient faiblement la représentation triviale 1_Γ (théorème 1 de [Lou]). Le second cas ne peut pas se produire. En effet, si π contenait faiblement 1_Γ, la représentation induite $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ contiendrait faiblement 1_G et sa restriction $(\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi)|_{G_1}$ contiendrait faiblement 1_{G_1}. La propriété (T) pour G_1 implique que la représentation $(\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi)|_{G_1}$ possèderait des vecteurs invariants de sorte que $\pi = (\rho \otimes 1)|_\Gamma$ pour une représentation irréductible ρ de G_1 ([BeLo], lemme 1). Par suite, la restriction $(\rho \otimes 1)|_\Gamma$ contiendrait faiblement 1_Γ, ce qui n'est pas possible (voir la remarque 2 de [Lou]).

On trouvera d'autres informations sur la cohomologie de ce type de groupes dans [Sha1] et [Lou].

TABLEAU RÉCAPITULATIF DES EXEMPLES

	G	$\widehat{G}$	$\operatorname{cor} G$	Représentations irréductibles avec $H^1 \neq 0$
1	abélien	séparé	$\{1_G\}$	1_G lorsque $\operatorname{Hom}(G, \mathbf{C}) \neq 0$
2	affine $ax+b$	$\mathbf{R} \cup \{\pi_+\} \cup \{\pi_-\}$	$\widehat{G}$	$1_G,\ \pi_+,\ \pi_-$
3	Heisenberg H_n	$\mathbf{R}^{2n} \cup \mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}^{2n}$	1_G
4_2	$\mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbf{R}^2$	$\mathbf{Z} \cup]0, \infty[$	$\mathbf{Z}$	$\pi_+,\ \pi_-$
4_3	$\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbf{R}^3$	$\widehat{\mathrm{SO}(3)} \cup \left(\widehat{\mathrm{SO}(2)} \times]0, \infty[\right)$	$\widehat{\mathrm{SO}(3)}$	rep. fondamentale de $\mathrm{SO}(3)$
$4_{\geq 3}$	$\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbf{R}^n$	$\widehat{\mathrm{SO}(n)} \cup \left(\widehat{\mathrm{SO}(n-1)} \times]0, \infty[\right)$	$\operatorname{cor} G \subsetneq \widehat{\mathrm{SO}(3)}$	rep. fondamentale de $\mathrm{SO}(n)$
$5_{\mathbf{R},2}$	$\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$		$\{1_G, *, *\}$	$\{*, *\}$
$5_{\mathbf{R},\geq 3}$	$\mathrm{SO}_0(n,1),\ n \geq 3$		$\{1_G, *\}$?	$\{*\}$
$5_{\mathbf{C}}$	$\mathrm{SU}(n,1),\ n \geq 1$		$\{1_G, *, *\}$?	$\{*, *\}$
6	G avec (T)		$\{1_G\}$	$\varnothing$
7	$\mathbf{F}_n$		$\widehat{\mathbf{F}_n}$	$\widehat{\mathbf{F}_n}$
8	$\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$		$\operatorname{cor} \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$	
9	Γ réseau dans G sans (T)		$\operatorname{supp} \lambda_\Gamma \subset \operatorname{cor} \Gamma$	
10	Γ réseau dans $G_1 \times G_2$, G_1 avec (T)		$\operatorname{cor} \Gamma \subset \overline{\widehat{G_2}\vert_\Gamma}$	$(1 \otimes \sigma)\vert_\Gamma$ avec $H^1(G_2, \sigma) \neq 0$

3. Représentations, cohomologie et fonctions (conditionnellement) de type positif

Les groupes sont supposés localement compacts séparables, les espaces de Hilbert considérés sont séparables et non nuls.

3.1 Représentations irréductibles et factorielles

Pour un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ d'opérateurs sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on note $\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid TS = ST \ \forall S \in \mathcal{S}\}$ le *commutant* de $\mathcal{S}$.

Soit π une représentation unitaire irréductible du groupe G sur l'espace $\mathcal{H}$. Grâce au lemme de Schur, l'irréductibilité de π signifie que le commutant $\pi(G)'$ de l'ensemble $\pi(G) = \{\pi(g) \mid g \in G\}$ est réduit aux opérateurs scalaires. Comme $\pi(G) \subset \mathcal{N}_\pi$, on a $\mathcal{N}'_\pi \subset \pi(G)'$. Ainsi, le centre $\mathcal{N}_\pi \cap \mathcal{N}'_\pi$ de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{N}_\pi$ est lui-même réduit aux opérateurs scalaires sur $\mathcal{H}$. Ceci montre qu'une représentation irréductible π est factorielle.

3.2 Fonctions de type positif

On appelle *fonction de type positif* sur le groupe localement compact G une fonction continue φ sur G à valeurs complexes telle que, pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$, la matrice $\left(\varphi(g_j^{-1} g_i)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est hermitienne positive : pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$ et pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \varphi(g_j^{-1} g_i) \geq 0 .$$

A propos des fonctions de type positif, voir le paragraphe 32 de [HeRo]. Si φ est une fonction de type positif alors, pour tout $g \in G$, $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$ et $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$ où e désigne l'élément neutre du groupe G. On note $E_0(G)$ l'ensemble des fonctions de type positif φ sur G telle que $\varphi(e) \leq 1$. C'est un sous-ensemble convexe et borné de l'espace $\mathrm{L}^\infty(G)$ des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur G.

Sur $\mathrm{L}^\infty(G)$, on considère les deux topologies suivantes : d'une part, la topologie $*$-faible ou topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ donnée par les semi-normes

$$p_f \colon \mathrm{L}^\infty(G) \longrightarrow \mathbf{R}_+ : \varphi \longmapsto |\langle \varphi, f \rangle|$$

où $f \in \mathrm{L}^1(G)$ et $\langle \varphi, f \rangle = \displaystyle\int_G \varphi(g) f(g)\, dg$; d'autre part, la topologie de la convergence uniforme sur toute partie compacte (ou plus simplement topologie de la convergence compacte) pour laquelle un système fondamental de voisinages de la fonction φ est donné par les ensembles

$$\mathcal{W}(\varphi;\varepsilon,K) = \left\{\psi \in \mathrm{L}^\infty(G) \ : \ \sup_{g\in K} |\varphi(g) - \psi(g)| < \varepsilon\right\}$$

où ε est un nombre strictement positif et K une partie compacte du groupe G.

La topologie de la convergence compacte est plus forte que la topologie $*$-faible. En général, ces deux topologies sont différentes. Pour le voir, on considère les fonctions f_n sur le groupe additif $\mathbf{R}$ qui sont linéaires par morceaux, valent zéro sur $]-\infty,0]$ et 1 sur $[\frac{1}{n},+\infty[$. Pour la topologie faible, ces fonctions convergent vers la fonction caractéristique de $]0,+\infty[$ alors qu'elles ne convergent pas uniformément sur les parties compactes.

L'ensemble $E_0(G)$ est fermé pour ces deux topologies, il est compact pour la topologie $*$-faible mais en général pas pour la topologie de la convergence compacte. Pour le voir, on considère le tore $G = S^1$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le caractère

$$\chi_n \colon S^1 \longrightarrow \mathbf{C} \colon z \longmapsto z^{-n}$$

pour $z = e^{2\pi i t} \in S^1$. Cette suite de fonctions de type positif converge vers la fonction nulle pour la topologie $*$-faible : pour $f \in \mathrm{L}^1(S^1)$, $\langle \chi_n, f\rangle$ coïncide avec le coefficient de Fourier $\widehat{f}(n)$ de f au point n qui tend vers zéro pour n tendant vers l'infini. A l'opposé, aucune sous-suite de (χ_n) ne peut converger uniformément vers zéro car $\sup_{z\in S^1} |\chi_n(z)| = 1$.

On note $E(G)$ l'ensemble des *états* de G : il s'agit des fonctions φ de type positif sur G pour lesquelles $\varphi(e) = 1$. Raikov a montré que, sur $E(G)$, les deux topologies décrites ci-dessus coïncident (voir [Rai] ou le théorème 13.5.2 de [Dix]). Pour un groupe non-discret, l'ensemble des états n'est en général pas fermé pour la topologie $*$-faible. En effet, les caractères du tore décrits ci-dessus sont des états du groupe S^1 mais leur limite pour la topologie $*$-faible vaut zéro au neutre.

Si $\operatorname{ex} E_0(G)$ désigne l'ensemble des points extrémaux du convexe $E_0(G)$, on note $P(G) = (\operatorname{ex} E_0(G)) \setminus \{0\}$ et on observe que $P(G) \subset E(G)$. Les éléments de $P(G)$ s'appellent les *états purs*. Comme $E_0(G)$ est convexe et compact pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, le théorème de Krein-Milman nous dit que $E_0(G)$ est l'enveloppe convexe des états purs et de 0. En particulier, $P(G)$ est non vide.

3.3 Construction GNS

Si $\pi \colon G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire de G et $\xi \in \mathcal{H}$, alors la fonction $\varphi(g) = \langle \pi(g)\xi \mid \xi\rangle$ est une fonction de type positif sur G telle que $\varphi(e) = \|\xi\|^2$. Une telle fonction est dite *associée* à la représentation π. Réciproquement, pour toute fonction φ non-nulle de type positif, il existe un triple $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ où $\pi_\varphi \colon G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\varphi)$ est une représentation unitaire de G

et $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ est un vecteur de norme $\sqrt{\varphi(e)}$ tels que l'orbite de ξ_φ sous l'action de $\pi_\varphi(G)$ est totale dans $\mathcal{H}_\varphi$ et, pour tout $g \in G$, on a

$$\varphi(g) = \langle \pi_\varphi(g)\, \xi_\varphi \mid \xi_\varphi \rangle .$$

Un tel triple est appelé *triple GNS* associé à φ. Il est unique à isomorphisme près. Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f\colon G \to \mathbf{C}$ de support fini alors $\mathcal{H}_\varphi$ est l'espace de Hilbert obtenu en séparant et complétant V pour la forme sesquilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x)\, \overline{h(y)}\, \varphi(y^{-1}x) .$$

Cette construction possède les propriétés suivantes :

(1) si φ, ψ et χ sont trois fonctions de type positif telles que $\psi = \varphi + \chi$ alors la représentation π_φ est une sous-représentation de π_ψ ;

(2) la fonction de type positif φ est pure si et seulement si la représentation π_φ est irréductible ;

(3) si $\varphi \equiv 1$ alors $\pi_\varphi = 1_G$;

(4) si φ est une fonction de type positif associée à une représentation π alors la représentation π_φ qu'on associe à φ par construction GNS est une sous-représentation de π.

3.4 Topologie sur le dual

Considérons la topologie de Fell (inner hull-kernel topology) sur l'ensemble Rep(G) des (classes d'équivalence de) représentations unitaires du groupe localement compact G. Cette topologie est définie comme ceci. Soient π une représentation, $\varepsilon > 0$, K un ensemble compact de G, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des fonctions de type positif associées à π. On note $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ l'ensemble des représentations $\rho \in \mathcal{S}$ pour lesquelles il existe des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n$, chacune étant une somme de fonctions de type positif associées à ρ, telles que

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \forall\, x \in K .$$

Les sous-ensembles du type $\mathcal{W}(\pi; K, \varepsilon, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ forment un système fondamental de voisinages de la représentation π dans Rep(G) (voir [Fel2], Section 2).

Cette topologie peut aussi être décrite en termes de contenance faible : la représentation π est *faiblement contenue* dans un ensemble $\mathcal{S}$ de représentations de G si toute fonction de type positif associée à π est limite,

pour la topologie de la convergence compacte, de sommes de fonctions de type positif associées à des représentations de $\mathcal{S}$. Avec ces définitions, une suite (généralisée) π_n de représentations unitaires de G converge vers π si et seulement si, pour toute sous-suite infinie $\pi_{n'}$ de π_n, π est faiblement contenue dans $\{\pi_{n'}\}$.

Pour les représentations irréductibles, la topologie ainsi induite sur $\widehat{G}$ n'est autre que la topologie quotient définie par l'application surjective

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G}\colon \varphi \longmapsto \pi_\varphi$$

qui associe à un état pur la classe de la représentation GNS correspondante, $P(G)$ étant muni d'une quelconque des topologies mentionnées au §3.2. De plus, si π est une représentation irréductible et $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de $\widehat{G}$, alors π est faiblement contenue dans $\mathcal{S}$ si et seulement si π est dans l'adhérence de $\mathcal{S}$ pour la topologie de Fell.

3.5 Cohomologie et actions affines

Une *action par isométries affines* du groupe G sur un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ est un morphisme α de G dans le groupe $\mathcal{I}so(\mathcal{H})$ des isométries affines de $\mathcal{H}$ tel que l'application

$$G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}\colon (g, \xi) \longmapsto \alpha(g)\,\xi$$

soit continue. Par le choix d'une origine, on identifie un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ à l'espace de Hilbert de ses translations. Si α est une action par isométries affines alors, pour tout g dans G et tout élément ξ de $\mathcal{H}$, on peut écrire

$$\alpha(g)\,\xi = \pi(g)\,\xi + b(g)$$

où $\pi(g)$ est un opérateur linéaire unitaire et $b(g) \in \mathcal{H}$. En imposant la continuité et la condition de morphisme pour α, on trouve d'une part que π est une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}$, appelée partie linéaire de α, et d'autre part que b est une application continue de G dans $\mathcal{H}$ qui satisfait la condition de cocycle

$$b(xy) = b(x) + \pi(x)\,b(y) \qquad \text{pour tous } x,\, y \in G\,.$$

Réciproquement, la donnée d'une représentation unitaire π de G sur $\mathcal{H}$ et d'une application continue b de G dans $\mathcal{H}$ vérifiant la condition de cocycle par rapport à π définit une action par isométries affines α de G sur $\mathcal{H}$, par la formule $\alpha(g)\,\xi = \pi(g)\,\xi + b(g)$.

Pour α, π et β comme ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes (voir [HaVa], chapitre 4, lemme 3):

(i) α possède un point fixe;

(ii) α possède une orbite bornée;

(iii) toute orbite de α est bornée;

(iv) le cocycle b associé à α est borné;

(v) le cocycle b associé à α est un cobord.

3.6 Fonctions conditionnellement de type positif

Si $b\colon G \to \mathcal{H}$ est un cocycle continu pour la représentation π alors la fonction ψ définie par

$$\psi(g) = -\|b(g)\|^2 \qquad \text{pour tout } g \in G\,,$$

est *conditionnellement de type positif*: pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \lambda_i \, \psi(g_j^{-1} g_i) \geq 0\,.$$

La fonction ψ est normalisée ($\psi(e) = 0$) et symétrique ($\psi(g) = \psi(g^{-1})$). Réciproquement, à une telle fonction continue ψ, on associe le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ où π_ψ est une représentation orthogonale de G dans l'espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_\psi$ et b_ψ est un cocycle à coefficients dans $\mathcal{H}_\psi$ tel que, d'une part, le sous-espace engendré par $b_\psi(G)$ est dense dans $\mathcal{H}_\psi$, et d'autre part, pour tout $g \in G$, on a

$$\psi(g) = -\frac{1}{2}\|b_\psi(g)\|^2\,.$$

Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f\colon G \to \mathbf{R}$ de support fini et telles que $\sum_{x\in G} f(x) = 0$ alors $\mathcal{H}_\psi$ est l'espace de Hilbert réel obtenu en séparant et complétant V pour la forme bilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y\in G} f(x)\, h(y)\, \psi(y^{-1}x)$$

et b_ψ applique $g \in G$ sur la classe dans $\mathcal{H}_\psi$ de la différence des fonctions caractéristique de g et e. La représentation π_ψ est déduite de l'action par multiplication à gauche de G sur V.

Soit π une représentation, b un 1-cocycle à coefficients dans π et $\psi = -\|b\|^2$ la fonction conditionnellement de type positif correspondante. On

note $\overline{\pi}$ la représentation conjuguée de π dans l'espace de Hilbert conjugué $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{b}$ le 1-cocycle à coefficients dans $\overline{\pi}$ correspondant à b. On peut alors réaliser $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ de la façon suivante: le cocycle b_ψ est donné par $b_\psi(g) = b(g) + \overline{b}(g)$, l'espace $\mathcal{H}_\psi$ est le sous-espace réel fermé de $\mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ engendré par $b_\psi(G)$, et π_ψ est la sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$ obtenue en restreignant l'action de $\pi \oplus \overline{\pi}$ au sous-espace réel invariant $\mathcal{H}_\psi$ (voir [Del], remarque V.3). De plus, pour tous $x, g \in G$, on a l'égalité

$$\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle = \psi(g^{-1}xg) - \psi(g^{-1}x) - \psi(xg) + \psi(x)\,. \tag{3.1}$$

4. Preuve du théorème

Soient π une représentation factorielle du groupe G telle que

$$\mathrm{H}^1(G, \pi) \neq 0$$

et b un 1-cocycle continu à coefficients dans π qui n'est pas un cobord. Il s'agit de montrer que le support de π est contenu dans le cortex de G.

4.1 Stratégie

On considère la fonction conditionnellement de type positif $\psi\colon G \to \mathbf{R}$ définie par

$$\psi(x) = -\|b(x)\|^2$$

et le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ correspondant.

Pour tout $g \in G$ on a une fonction

$$\psi^g\colon G \longrightarrow \mathbf{C}\colon x \longmapsto \langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle$$

qui est de type positif et qu'on va décomposer en une somme

$$\psi^g = \varphi^g + \chi^g \tag{4.1}$$

de deux fonctions de type positif (proposition 4.7).

Soit $\widetilde{\mathcal{V}}$ un voisinage de 1_G dans $\widehat{G}$. En utilisant l'hypothèse que b n'est pas un cobord, nous montrons qu'il existe $g \in G$ tel que la fonction φ^g est non nulle (proposition 4.8) et limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons linéaires de fonctions de type positif associées à des représentations de $\widetilde{\mathcal{V}}$ (proposition 4.10).

La fin de la preuve est alors standard, et se déroule comme suit. Soit $(\mathcal{K}, \rho, \xi)$ le triple GNS défini par φ^g. Il résulte de l'assertion ci-dessus que

le support de ρ est contenu dans l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{V}}$ pour la topologie de Fell. La décomposition (4.1) montre que ρ est une sous-représentation de la représentation GNS associée à ψ^g, qui est elle-même une sous-représentation de π_ψ ; et π_ψ est une sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$. Quitte à échanger les rôles de π et $\overline{\pi}$ (ce qui peut se faire sans perte de généralité car $\mathrm{H}^1(G,\pi) \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{H}^1(G,\overline{\pi}) \neq 0$ et $\operatorname{supp}\pi \subset \operatorname{cor} G$ si et seulement si $\operatorname{supp}\overline{\pi} \subset \operatorname{cor} G$), on peut supposer que ρ possède une sous-représentation σ qui est équivalente à une sous-représentation de π.

Le support de σ est dans l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{V}}$, puisqu'il est contenu dans le support de ρ. Comme π est une représentation factorielle, σ et π sont quasi-équivalentes (proposition 5.3.5 de [Dix]), d'où il résulte que leurs supports coïncident. Par suite

$$\operatorname{supp}\pi = \operatorname{supp}\sigma \subset \overline{\widetilde{\mathcal{V}}}.$$

Ceci étant vrai pour tout choix de $\widetilde{\mathcal{V}}$, le support de π est contenu dans le cortex de G.

4.2 Théorème de Schoenberg

Soit ψ une fonction conditionnellement de type positif sur un groupe G. Pour tout nombre réel $t > 0$, la fonction φ_t définie par

$$\varphi_t(g) = e^{t\psi(g)}$$

est de type positif. De plus,

$$\lim_{t\to 0} \varphi_t = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t - 1}{t} = \psi \tag{4.2}$$

avec des limites au sens de la topologie de la convergence compacte (voir par exemple le théorème 5.16 de [HaVa]).

4.3 Décomposition de Choquet

On dit qu'une mesure μ sur un espace Ω est *supportée* par une partie mesurable $A \subset \Omega$ si $\mu(\Omega \setminus A) = 0$.

Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et métrisable et K une partie convexe et compacte de F. On note $\operatorname{ex} K$ l'ensemble des points extrémaux de K. Une mesure de probabilité μ supportée par $\operatorname{ex} K$ détermine un unique élément $x \in K$ donné par la formule

$$x = \int_K y\, d\mu(y),$$

entendue au sens $*$-faible, c'est-à-dire au sens où

$$f(x) = \int_K f(y)\, d\mu(y)$$

pour toute forme linéaire continue f sur F ([Cho], proposition 26.3). Réciproquement, tout élément x de K peut être représenté de cette manière. En effet, pour tout $x \in K$ il existe une mesure de probabilité μ sur K, supportée par $\operatorname{ex} K$, telle que

$$x = \int_K y\, d\mu(y)$$

au sens $*$-faible. Une telle décomposition est appelée *décomposition de Choquet* du point x (voir [Cho], Theorem 27.6). Dans le cas où x est lui-même un point extrémal, la mesure μ qui donne une décomposition de Choquet du point x est unique et donnée par la mesure de Dirac δ_x au point x ([Cho], proposition 26.3). En particulier, pour l'ensemble $E_0(G)$ défini au numéro 3.2, il existe pour tout $t > 0$ une mesure de probabilité μ_t supportée par $P(G) \cup \{0\}$ telle que

$$\varphi_t = \int_{E_0(G)} \eta\, d\mu_t(\eta)$$

au sens faible $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, c'est-à-dire au sens où

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{E_0(G)} \langle \eta, f \rangle\, d\mu_t(\eta)$$

pour tout $f \in \mathrm{L}^1(G)$ (voir [Dix], proposition 13.6.8).

4.4 Localisation

On note $\mathcal{V}$ le voisinage de la fonction 1 dans $P(G)$ qui est l'image inverse de $\widetilde{\mathcal{V}}$ par l'application

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G} \colon \varphi \longmapsto \pi_\varphi .$$

On va décomposer les fonctions de type positif φ_t de la façon suivante. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de la fonction constante 1 dans $E_0(G)$ tel que $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$. Puisque $\lim_{t \to 0} \varphi_t = 1$, on peut supposer grâce au lemme ci-dessous que $\mu_t(\mathcal{W}) \neq 0$. On définit

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \int_{\mathcal{W}} \eta\, d\mu_t(\eta)$$

et

$$\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \displaystyle\int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \eta\, d\mu_t(\eta) & \text{si } \mu_t(\mathcal{W}) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\varphi_t = \int_{\mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta)$$
$$= \mu_t(\mathcal{W})\varphi_t^{\mathcal{W}} + (1 - \mu_t(\mathcal{W}))\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} .$$

En posant $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W})$, on obtient

$$\frac{\varphi_t - 1}{t} = \frac{\lambda_t \varphi_t^{\mathcal{W}} + (1-\lambda_t)\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} = \frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} + \frac{1-\lambda_t}{t}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t{}^{\mathcal{W}}\right) . \tag{4.3}$$

4.5. PROPOSITION. *On conserve les notations précédentes.*

(i) $\lim_{t\to 0} \lambda_t = 1$;

(ii) $\lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ *uniformément sur tout compact;*

(iii) *pour tout* $t > 0$, $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ *est limite uniforme sur tout compact de combinaisons convexes d'éléments de* $\mathcal{V}$.

De plus, pour une sous-suite de φ_t *que l'on indexe encore par* t,

(iv) *il existe une fonction* $\varphi_0 \in E_0(G)$, $\varphi_0 \not\equiv 1$ *telle que* $\lim_{t\to 0} \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$ *pour la topologie* $*$*-faible;*

(v) *il existe un nombre réel positif* λ *tel que* $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda$.

Afin de démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. *Soit* K *un compact convexe dans un espace métrisable. Soient* $\varphi \in \operatorname{ex} K$ *un point extrémal de* K *et* φ_t *une suite d'éléments de* K *telle que* $\lim_{t\to 0} \varphi_t = \varphi$. *Pour chaque* t, *on se donne une décomposition de Choquet*

$$\varphi_t = \int_K \eta \, d\mu_t(\eta)$$

où μ_t *est une mesure de probabilité supportée par* $\operatorname{ex} K$. *Alors, pour tout voisinage* $\mathcal{W}$ *de* φ *dans* K, *on a*

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} K) = 1 .$$

Preuve. L'ensemble $\mathcal{M}(K)$ des mesures de probabilité sur K est compact pour la topologie faible. Il existe donc une sous-suite μ_{t_k} de μ_t qui converge

faiblement sur K vers une mesure μ. La suite φ_t converge vers φ qui est un point extrémal, donc

$$\varphi = \int_{\operatorname{ex} K} \eta \, d\mu(\eta)$$

et la mesure μ coïncide avec la mesure de Dirac δ_φ au point φ (Proposition 26.3 de [Cho]). De plus, toute sous-suite convergente de (μ_t) admet δ_φ comme limite. Autrement dit, δ_φ est l'unique point adhérent de la suite (μ_t) et $\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1$ pour tout voisinage $\mathcal{W}$ contenant φ. La mesure μ_t est supportée par $\operatorname{ex} K$, donc

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} K) = 1$$

comme annoncé. $\square$

Preuve de (i). C'est une conséquence du lemme ci-dessus. En effet,

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = \lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} E_0(G)) = 1 \,.$$

Preuve de (ii). Les fonctions $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ et la fonction constante 1 appartiennent à l'ensemble $E(G)$ sur lequel les topologies $*$-faible et de la convergence compacte coïncident. Il suffit donc de montrer que $\lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$. Pour $f \in \mathrm{L}^1(G)$, on a

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{\mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta)$$

et

$$\lim_{t\to 0} \langle \varphi_t, f \rangle = \langle 1, f \rangle \,.$$

Le lemme implique que

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} \mu_t(E_0(G)\setminus \mathcal{W}) = 0 \,,$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \langle \varphi_t^{\mathcal{W}}, f \rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \Big(\langle \varphi_t, f \rangle - \int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta) \Big) = \langle 1, f \rangle \,.$$

Preuve de (iii). Pour une partie A de $E_0(G)$, on désigne par $\overline{A}$ l'adhérence de A dans $E_0(G)$ pour la topologie $*$-faible et $\operatorname{co} A$ son enveloppe convexe. Posons

$$K_{\mathcal{W}} := \overline{\operatorname{co}(\mathcal{W} \cap P(G))}$$

et considérons la mesure $\mu_t^{\mathcal{W}}$, supportée par $\mathcal{W} \cap P(G)$, donnée par

$$\mu_t^{\mathcal{W}}(A) = \frac{\mu_t(A \cap \mathcal{W})}{\mu_t(\mathcal{W})} \qquad \text{pour } A \subset E_0(G)\,.$$

Ceci détermine une mesure de probabilité sur le compact convexe $K_{\mathcal{W}}$ telle que

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \int_{K_{\mathcal{W}}} \eta \, d\mu_t^{\mathcal{W}}(\eta)\,.$$

La proposition 26.3 de [Cho] implique que $\varphi_t^{\mathcal{W}} \in K_{\mathcal{W}}$. Autrement dit, la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit comme limite pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Or $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ appartient à $E(G)$ et $\mathrm{co}(\mathcal{W} \cap P(G)) \subset E(G)$ sur lequel les topologies de la convergence compacte et $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ coïncident, donc la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit aussi comme limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$.

Preuve de (iv). Comme la suite $(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}})$ est contenue dans $E_0(G)$ qui est compact pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, il existe une sous-suite, encore indexée par t, et un élément $\varphi_0 \in E_0(G)$ tel que

$$\lim_{t \to 0} \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$$

pour la topologie faible $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

Supposons que $\varphi_0 \equiv 1$. En particulier, on peut supposer que les fonctions $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$ qui apparaissent dans la sous-suite considérée sont toutes non nulles. Considérons la mesure $\widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}$ définie par

$$\widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}(A) = \frac{\mu_t(A \cap (E_0(G) \backslash \mathcal{W}))}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \qquad \text{pour } A \subset E_0(G)\,.$$

Cette mesure est supportée par $(E_0(G) \backslash \mathcal{W}) \cap P(G)$, et donne pour tout t une décomposition de Choquet de $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$.

Puisque $\varphi_0 \equiv 1$ est un point extrémal, la mesure de probabilité μ_0 qui donne une décomposition de Choquet de φ_0 est la mesure de Dirac en 1 et vérifie

$$\mu_0 = \lim_{t \to 0} \widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}\,.$$

Par conséquent,

$$1 = \mu_0(\mathcal{W}) = \lim_{t \to 0} \widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}(\mathcal{W}) = 0\,,$$

ce qui est absurde.

Preuve de (v). Montrons d'abord qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\frac{1-\lambda_t}{t}$ soit borné pour $0 < t < t_0$.

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, quitte à extraire une sous-suite que l'on indexe encore par t, on peut supposer que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty .$$

Choisissons un $g_0 \in G$ tel que $\varphi_0(g_0) \neq 1$ et un voisinage ouvert relativement compact $\mathcal{U}$ de g_0 dans G tel que

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(g) - 1) < 0 \qquad \text{pour tout } g \in \mathcal{U}$$

et une fonction $f \in \mathrm{L}^1(G)$, non nulle, positive et telle que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$. L'équation (4.3) donne

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f\right\rangle + \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right)\left\langle \operatorname{Re}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right), f\right\rangle .$$

Grâce au choix de f, on a

$$\lim_{t\to 0}\left\langle \operatorname{Re}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right), f\right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\varphi_0 - 1\right), f\right\rangle < 0$$

et

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f\right\rangle \leq 0 .$$

Puisque $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty$, grâce à (4.2) on a

$$\left\langle \operatorname{Re}\psi, f\right\rangle = \lim_{t\to 0}\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\right\rangle = -\infty .$$

Comme ψ est continue et f est à support relativement compact, ceci mène à une contradiction. On peut donc supposer, quitte à passer à une sous-suite, que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda ,$$

avec $\lambda \geq 0$ car $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W}) \leq 1$.

Ceci termine la preuve de la proposition 4.5. $\square$

4.6 Constructions GNS

Fixons $g \in G$. En utilisant (3.1) et (4.2), on a

$$\left\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\right\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\varphi_t(g^{-1}xg) - \varphi_t(g^{-1}x) - \varphi_t(xg) + \varphi_t(x)\right\}$$

uniformément pour x parcourant les ensembles compacts de G.

On utilise alors l'égalité (4.3) pour trouver

$$\begin{aligned}
&\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\rangle \\
&\quad = \lim_{t\to 0}\Big\{ \tfrac{1}{t}\big(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(xg) + \varphi_t^{\mathcal{W}}(x)\big) \\
&\qquad + \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\big(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(xg) + \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(x)\big) \\
&\qquad - \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\big(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(xg) + \varphi_t^{\mathcal{W}}(x)\big)\Big\}
\end{aligned}$$

uniformément pour x parcourant les parties compactes de G. Pour tout $t > 0$, soit $(\mathcal{H}_t, \pi_t, \xi_t)$ (resp. $(\widetilde{\mathcal{H}}_t, \widetilde{\pi}_t, \widetilde{\xi}_t)$) le triple GNS associé à la fonction de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ (resp. $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$). En posant

$$\eta_t^g = \frac{1}{\sqrt{t}}(\pi_t(g)\,\xi_t - \xi_t)\,, \quad \alpha_t^g = \widetilde{\pi}_t(g)\,\widetilde{\xi}_t - \widetilde{\xi}_t \quad \text{et} \quad \beta_t^g = \pi_t(g)\,\xi_t - \xi_t\,,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
(4.4) \qquad \langle \pi_\psi(\,.\,)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\rangle = \lim_{t\to 0}\Big\{ &\langle \pi_t(\,.\,)\,\eta_t^g \mid \eta_t^g\rangle \\
&+ \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\langle \widetilde{\pi}_t(\,.\,)\,\alpha_t^g \mid \alpha_t^g\rangle \\
&- \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\langle \pi_t(\,.\,)\,\beta_t^g \mid \beta_t^g\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

pour la topologie de la convergence compacte et donc aussi pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

4.7. PROPOSITION. *On pose* $\alpha_0^g = \pi_0(g)\,\xi_0 - \xi_0$ *où* $(\mathcal{H}_0, \pi_0, \xi_0)$ *est le triple GNS associé à la fonction de type positif* φ_0 *apparaissant dans la proposition 4.5 (iv). Pour le reste, on conserve les notations précédentes.*

(i) $\lim_{t\to 0}\langle \widetilde{\pi}_t(\,.\,)\,\alpha_t^g \mid \alpha_t^g\rangle = \langle \pi_0(\,.\,)\,\alpha_0^g \mid \alpha_0^g\rangle$ *pour la topologie* $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ *;*

(ii) $\lim_{t\to 0}\langle \pi_t(\,.\,)\,\beta_t^g \mid \beta_t^g\rangle = 0$ *pour la topologie* $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ *;*

(iii) *il existe une sous-suite de* φ_t*, toujours indexée par* t*, et une fonction de type positif* φ^g *telle que, pour la topologie* $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$*, on ait*

$$\lim_{t\to 0}\langle \pi_t(\,.\,)\,\eta_t^g \mid \eta_t^g\rangle = \varphi^g\,.$$

Preuve. L'assertion (i) est une conséquence du fait que

$$\varphi_0 = \lim_{t\to 0}\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \lim_{t\to 0}\langle \widetilde{\pi}_t(\,.\,)\,\widetilde{\xi}_t \mid \widetilde{\xi}_t\rangle$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, et que $\varphi_0 = \langle \pi_0(\,.\,)\,\xi_0 \mid \xi_0 \rangle$. Grâce à 4.5 (ii) on a

$$\lim_{t\to 0} \langle \pi_t(\,.\,)\,\xi_t \mid \xi_t \rangle = \lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, et donc

$$\lim_{t\to 0} \langle \pi_t(\,.\,)\,\beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle = 0$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$. Enfin, en utilisant la compacité de $E_0(G)$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, on peut extraire une sous-suite telle que $\lim_{t\to 0} \langle \pi_t(\,.\,)\,\eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ existe. On note cette limite φ^g. $\square$

En passant à la limite dans (4.4), on écrit

$$\langle \pi_\psi(\,.\,)\,b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle = \varphi^g + \lambda \langle \pi_0(\,.\,)\,\alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle . \tag{4.5}$$

Pour chaque $g \in G$, ceci fournit un candidat pour une décomposition du type (4.1) avec $\chi^g = \lambda \langle \pi_0(\,.\,)\,\alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle$. Il reste à vérifier qu'il existe un élément $g \in G$ tel que la fonction φ^g possède les bonnes propriétés.

4.8. PROPOSITION. *Si le cocycle b n'est pas un cobord, alors il existe un élément $g \in G$ tel que $\varphi^g \not\equiv 0$.*

Preuve. Si $\varphi^g \equiv 0$ pour tout $g \in G$, alors d'une part

$$\begin{aligned} \left\| \langle \pi_\psi(\,.\,)\,b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \right\|_\infty &= \sup_{x\in G} \left| \langle \pi_\psi(x)\,b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \right| \\ &= \langle \pi_\psi(e)\,b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \\ &= -2\,\psi(g) = 2\,\|b(g)\|^2 , \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \left\| \langle \pi_\psi(\,.\,) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \right\|_\infty &= \lambda \langle \pi_0(e)\,\alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle \\ &= \lambda \langle \pi_0(g)\,\xi_0 - \xi_0 \mid \pi_0(g)\,\xi_0 - \xi_0 \rangle \\ &= 2\lambda \left(1 - \operatorname{Re} \varphi_0(g)\right) \end{aligned}$$

pour tout $g \in G$. La fonction de type positif φ_0 est bornée; l'égalité $\|b(g)\|^2 = \lambda(1 - \operatorname{Re}\varphi_0(g))$ implique que b est un cocycle borné sur G, donc un cobord. $\square$

Pour la suite, on fixe un élément $g \in G$ tel que $\varphi^g \not\equiv 0$.

4.9. PROPOSITION. *Les fonctions de type positif* $\langle \pi_t(\,.\,)\eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ *sont uniformément bornées pour* $t > 0$, *autrement dit*

$$\sup_{t>0} \sup_{x\in G} \left| \langle \pi_t(x)\, \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle \right| < \infty .$$

Preuve. On a

$$\sup_{x\in G} \left| \langle \pi_t(x)\, \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle \right| = \langle \pi_t(e)\, \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle = \|\eta_t^g\|^2 .$$

On va montrer que $\langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ est borné pour $t > 0$. Pour cela, écrivons l'égalité (4.4) au point $x = e$,

$$\left\| b_\psi(g) \right\|^2 = \lim_{t\to 0} \left\{ \langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle + \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right) \langle \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle - \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right) \langle \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle \right\} .$$

On a

$$\begin{aligned} \langle \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle - \langle \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle & \\ &= \left\{ 2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \widetilde{\pi}_t(g)\, \widetilde{\xi}_t \mid \widetilde{\xi}_t \rangle \right\} - \left\{ 2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \pi_t(g)\, \xi_t \mid \xi_t \rangle \right\} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\big(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g) - \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g) \big) , \end{aligned}$$

et les suites

$$\left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right) , \qquad \left| \varphi_t^{\mathcal{W}}(g) \right| \qquad \text{et} \qquad \left| \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g) \right|$$

sont bornées en t. Donc la suite $\langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ est également bornée. □

4.10. PROPOSITION. *La fonction* φ^g *est limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons convexes de fonctions de type positif associées à des représentations de* $\widetilde{\mathcal{V}}$.

Preuve. Grâce aux propositions 4.7 (iii) et 4.9, la fonction de type positif φ^g est limite pour la topologie $*$-faible de fonctions de type positif uniformément bornées associées aux représentations π_t. Ceci implique ([Fel1], Lemma 1.5) qu'il existe une suite θ_t de fonctions de type positif associées aux représentations π_t telle que

$$\varphi^g = \lim_{t\to 0} \theta_t$$

uniformément sur les compacts de G.

De plus, π_t est la représentation GNS associée à la fonction de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ qui, d'après 4.5 (iii), est limite uniforme sur les compacts de combinaisons

convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Donc les fonctions de type positif associées à π_t sont limites uniformes sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Finalement, φ^g est elle-même limite uniforme sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$. Comme les fonctions de type positif appartenant à $\mathcal{V}$ sont associées aux représentations de $\widetilde{\mathcal{V}}$, ceci termine la preuve de la proposition. $\square$

On a donc établi une décomposition de la fonction $\langle \pi_\psi(\,.\,) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle$ comme annoncé en 4.1. Ceci termine la preuve du Théorème. $\square$

RÉFÉRENCES

[BeHa] BEKKA, M. et P. DE LA HARPE. Représentations d'un groupe faiblement équivalentes à la représentation régulière. *Bull. Soc. Math. France 122* (1994), 333–342.

[BeKa] BEKKA, M. et E. KANIUTH. Irreducible representations of locally compact groups that cannot be Hausdorff separated from the identity representation. *J. reine angew. Math. 385* (1988), 203–220.

[BeLo] BEKKA, M. et N. LOUVET. On a variant of Kazhdan's property (T) for subgroups of semisimple groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 47* (1997), 1065–1078.

[BLM] BOIDOL, J., J. LUDWIG et D. MÜLLER. On infinitely small orbits. *Studia Math. 88* (1988), 1–11.

[CoSt] COWLING, M. et T. STEGER. The irreducibility of restrictions of unitary representations to lattices. *J. reine angew. Math. 420* (1991), 85–98.

[Cho] CHOQUET, G. *Lectures on Analysis, Vol. 2.* W. A. Benjamin, 1969.

[Dav] DAVIDSON, K. R. *C^*-Algebras by Example.* Fields Institute Monographs *6.* Amer. Math. Soc., 1996.

[Del] DELORME, P. 1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles — Produits tensoriels continus de représentations. *Bull. Soc. Math. France 105* (1977), 281–336.

[Dix] DIXMIER, J. *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars, 1969.

[Fel1] FELL, J. M. G. The dual spaces of C^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc. 94* (1960), 365–403.

[Fel2] —— Weak containment and induced representations of groups. *Canad. J. Math. 14* (1962), 237–268.

[Gui1] GUICHARDET, A. Cohomologie des groupes localement compacts et produits tensoriels continus de représentations. *J. Multivariate Anal. 6* (1976), 138–158.

[Gui2] —— Sur la cohomologie des groupes topologiques II. *Bull. Sci. Math. (2) 96* (1972), 305–332.

[HaVa] DE LA HARPE, P. et A. VALETTE. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts.* Astérisque *175.* Soc. Math. de France, 1989.

[Her] HERVÉ, M. Sur les représentations intégrales à l'aide des points extrémaux dans un ensemble compact métrisable. *C. R. Acad. Sc. 235* (1961), 366–368.

[HeRo] HEWITT, E. et K. A. ROSS. *Abstract Harmonic Analysis.* Springer, 1970.

[Lou] LOUVET, N. Cohomological rigidity for lattices in products of groups. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 327* (1998), 133–138.

[LuZi] LUBOTZKY, A. et R. J. ZIMMER. Variants of Kazhdan's property for subgroups of semisimple groups. *Israel J. Math. 66* (1989), 289–298.

[Mac] MACKEY, G. W. *The Theory of Unitary Group Representations.* Chicago University Press, 1976.

[Mil] MILIČIĆ, D. Topological representations of the group C^*-algebra of $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. *Glasnik Mat. Sér. III 6* (1971), 231–246.

[Rag] RAGHUNATHAN, M. S. *Discrete Subgroups of Lie Groups.* Springer, 1972.

[Rai] RAIKOV, D. A. On various types of convergence of positive definite functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR 58* (1947), 1279–1282.

[Sha1] SHALOM, Y. Rigidity and cohomology of unitary representations. *Internat. Math. Res. Notices 16* (1998), 829–849.

[Sha2] —— Rigidity of commensurators and irreducible lattices. *Invent. Math. 141* (2000), 1–54.

[Sto] STOWE, D. The stationary set of a group action. *Proc. Amer. Math. Soc. 79* (1980), 139–146.

[VeKa] VERSHIK, A. M. et S. I. KARPUSHEV. Cohomology of groups in unitary representations, neighborhood of the identity and conditionally positive definite functions. *Math. USSR Sbornik 47* (1984), 513–526.

[War2] WARNER, G. *Harmonic Analysis for Semi-Simple Lie Groups.* Springer, 1972.

[Weil] WEIL, A. Remarks on the cohomology of groups. *Ann. of Math. (2) 80* (1964), 149–157.

[Yosh] YOSHIZAWA, H. Some remarks on unitary representations of the free group. *Osaka Math. J. 3* (1951), 55–63.

(Reçu le 1er mars 2000; version révisée reçue le 27 novembre 2000)

Nicolas Louvet

Laboratoire de Mathématiques
Université de Metz
Ile du Saulcy
F-57000 Metz
France
e-mail: louvet@poncelet.sciences.univ-metz.fr