§2 La pratique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

dans $\mathrm{Imp}(x_0)$, les pièces critiques situées sur les colonnes $0, \ldots, n-1$ de $T(x)$ ont une profondeur bornée par un entier l. Par suite, pour tout $i \geq l$, l'application f^n induit un homéomorphisme conforme de $P_{i+n}(x)$ sur $P_i(x_0)$, donc un homéomorphisme de $\mathrm{Imp}(x)$ sur $\mathrm{Imp}(x_0)$.

On suppose à présent que l'orbite de x évite $\mathrm{Imp}(x_0)$, c'est-à-dire qu'aucune colonne de $T(x)$ n'est entièrement critique. On va montrer que, si $T(x)$ est récurrent, il est non persistant. Il suffit pour cela de construire une suite n_i sur laquelle τ est bornée.

Dans le tableau $T(x_0)$, entre les colonnes 0 et k, les positions critiques ont une profondeur majorée par l. Dans $T(x)$, on regarde la colonne de plus petit indice j où l'on trouve des positions critiques à une profondeur strictement supérieure à l et on note p la profondeur de la dernière position critique sur cette colonne. L'anneau $A_p\big(f^j(x)\big)$ est donc semi-critique. La propriété T3) assure alors que la diagonale issue de la position $(p+j+1, 0)$ dans $T(x)$ ne contient aucune pièce critique à une profondeur strictement supérieure à $l+1$. Ainsi, $\tau(p+j+1) \leq l+1$ et on pose $n_1 = p+j+1$. On continue en considérant la colonne de plus petit indice qui contient des positions critiques de profondeur strictement supérieure à p. On construit ainsi une suite n_i sur laquelle τ reste bornée par $l+1$. $\square$

§2 La pratique

2.1 Un théorème de connexité locale

On s'intéresse dans la suite aux polynômes de degré $d+1$, $d \geq 2$, dont l'un des points fixes dans $\mathbf{C}$ est un point critique de multiplicité $d-1$. Un tel polynôme est conjugué, par une transformation affine de $\mathbf{C}$, à un polynôme de la forme

$$(*) \qquad f(x) = a + \left(x + \frac{d+2}{d}a\right)(x-a)^d, \qquad x \in \mathbf{C},$$

où a désigne le point fixe critique de multiplicité $d-1$. Le point $-a$ est alors l'unique autre point critique et sera appelé (par contraste) *point critique libre*.

Le point a est un point fixe super-attractif. Son *bassin d'attraction* est l'ouvert

$$\widetilde{B}(a) = \left\{x \in \widehat{\mathbf{C}} \mid f^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} a\right\}$$

et son *bassin immédiat*, noté $B(a)$, est la composante connexe de $\widetilde{B}(a)$ qui contient a. Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. *Le bord du bassin immédiat $B(a)$ est localement connexe. En fait, c'est une courbe de Jordan.*

REMARQUE 2.2. Le cas où $d = 2$ a été considéré par D. Faught dans sa thèse [Fa].

La démonstration du théorème, qu'on expose dans la suite, distingue deux cas.

Si le point critique libre $-a$ est dans $B(a)$ ou dans le bassin de l'infini

$$B(\infty) = \left\{ x \in \widehat{\mathbf{C}} \mid f^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \right\},$$

le polynôme f est hyperbolique. La preuve s'appuie alors sur des arguments très classiques qu'on explique brièvement dans la partie 2.3.

Dans la suite, on considère donc un polynôme f de la forme $(*)$ pour lequel $-a$ n'est ni dans $B(a)$, ni dans $B(\infty)$. La démonstration se déroule en trois étapes. On donne d'abord une première description de la dynamique du polynôme f fondée sur des résultats classiques [M1]. On exploite ensuite cette description pour trouver un graphe admissible auquel on puisse appliquer le théorème 1.10. Si le bout critique n'est pas périodique, chaque impression est réduite à un point et il suffit alors de voir que l'adhérence de toute pièce a une intersection connexe avec le bord de $B(a)$ pour établir la connexité locale. Sinon, il reste une étape pour montrer que l'impression du point critique libre rencontre $\partial B(a)$ en un seul point.

2.2 ÉTUDE RAPIDE DE LA DYNAMIQUE

On observe tout d'abord que, comme $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, le bassin d'attraction $B(\infty)$ est connexe. Ensuite, le théorème de Böttcher [B] donne le résultat suivant (voir [M1, 17.3]):

PROPOSITION 2.3. *Si $-a$ est en dehors de $B(a)$ (resp. de $B(\infty)$), il existe une représentation conforme $\phi_a\colon \mathbf{D} \to B(a)$ (resp. $\phi\colon \mathbf{D} \to B(\infty)$) qui conjugue f à $z \mapsto z^d$ (resp. à $z \mapsto z^{d+1}$) et est unique à composition près dans $\mathbf{D}$ avec une rotation d'angle $2k\pi/(d-1)$ (resp. $2k\pi/d$).*

De telles représentations, lorsqu'elles existent, induisent des coordonnées polaires très utiles sur $B(a)$ et $B(\infty)$. On appelle ainsi :

- *rayon d'angle θ issu de a* l'ensemble
$$R_a(\theta) = \left\{\phi_a(r\,e^{2i\pi\theta}),\ r \in [0,1[\right\};$$
- *rayon externe d'angle θ* l'ensemble
$$R(\theta) = \left\{\phi(r\,e^{2i\pi\theta}),\ r \in [0,1[\right\};$$
- *équipotentielle de niveau v autour de a* la courbe
$$E_a(v) = \left\{\phi_a(r\,e^{2i\pi\theta}),\ \theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\right\};$$
- *équipotentielle externe de niveau v* la courbe
$$E(v) = \left\{\phi(r\,e^{2i\pi\theta}),\ \theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\right\}.$$

Les rayons sont des arcs sur lesquels la dynamique agit simplement : $f\big(R_a(\theta)\big) = R_a(d\theta)$ et $f\big(R(\theta)\big) = R\big((d+1)\,\theta\big)$. De plus, les rayons d'angles rationnels forment toujours des chemins d'accès à l'ensemble de Julia $J(f)$:

THÉORÈME 2.4 (Douady, Hubbard, Sullivan, Yoccoz).

a) *Pour tout $\theta \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, les rayons $R_a(\theta)$ et $R(\theta)$ aboutissent chacun en un point de l'ensemble de Julia, c'est-à-dire que les arcs $r \in [0,1[\mapsto \phi_a(r\,e^{2i\pi\theta})$ et $r \in [0,1[\mapsto \phi(r\,e^{2i\pi\theta})$ ont chacun une limite dans $J(f)$ lorsque r tend vers 1. De plus, chacune de ces limites (ou points d'aboutissement) est un point pré-périodique répulsif ou parabolique.*

b) *Tout point périodique répulsif ou parabolique de $J(f)$ est le point d'aboutissement d'au moins un rayon externe qui est périodique.*

On rappelle ici qu'un point p-périodique x de f est *parabolique* si $(f^p)'(x)$ est une racine de l'unité.

Esquisse de preuve. Pour une preuve complète, voir [M1, 18.1 et 18.2].

a) On traite le cas du rayon issu de a (l'autre est analogue). Comme θ est rationnel, $R_a(\theta)$ est pré-périodique par f et, quitte à changer θ en l'un de ses multiples, on peut supposer que $R_a(\theta)$ est fixe par un itéré f^k. On choisit un point $y_0 \in R_a(\theta)$ et on regarde la suite $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ de ses préimages successives par f^k sur $R_a(\theta)$. La distance hyperbolique $\mathrm{dist}_h(y_n, y_{n+1})$, dans $B(a) \setminus \{a\}$, est égale à $\mathrm{dist}_h(y_0, y_1)$. Comme la suite y_n s'accumule sur $\partial B(a)$, la distance euclidienne $\mathrm{dist}_e(y_n, y_{n+1})$ tend vers 0. De plus, comme $f^k(y_{n+1}) = y_n$, les valeurs d'adhérence de la suite y_n sont des points fixes

par f^k et sont donc en nombre fini. Par ailleurs, toute suite $y'_i \in R_a(\theta)$ est à distance hyperbolique bornée d'une suite extraite y_{n_i} et ses valeurs d'adhérence sont donc aussi des points fixes de f^k. Comme l'accumulation du rayon est connexe, elle est réduite à un point.

b) La preuve est plus difficile et on n'en donne qu'une idée très succincte pour un point k-périodique répulsif x. D'après un théorème classique de G. Kœnigs, x possède un voisinage U sur lequel f est analytiquement conjuguée à l'application $z \mapsto \lambda z$ où $\lambda = (f^k)'(x)$. On voit facilement que chaque composante connexe V de $U \setminus K(f)$ est simplement connexe et le point délicat est de montrer qu'elle est périodique par f^k, *i.e.* que $f^{ki}(V) \supset V$ pour un certain entier i. On vérifie ensuite que l'anneau V/f^{ki} obtenu en quotientant V par la relation d'équivalence $x \sim f^{ki}(x)$, avec sa métrique hyperbolique, a une géodésique fermée et celle-ci se relève alors en le rayon externe cherché. □

Dans le bassin $B(a)$, on a en outre le résultat suivant qui, compte tenu du théorème de Carathéodory [C], montre que le bord $\partial B(a)$ est une courbe de Jordan dès qu'il est localement connexe :

LEMME 2.5. *Si deux rayons issus de a (d'angles rationnels ou non) aboutissent en un même point de $\partial B(a)$, ils sont égaux.*

Preuve. Sinon, les deux rayons forment, avec leur point d'aboutissement x, une courbe de Jordan qui borde un ouvert connexe borné U. Comme ∂U est inclus dans $\bar{B}(a)$ qui est compact et invariant par f, le principe du maximum assure que la famille f^n, $n \geq 0$, est bornée sur U et donc normale. Pour obtenir une contradiction, il suffit alors de montrer que U rencontre $J(f)$. Or, si ce n'est pas le cas, x est le seul point sur lequel peuvent s'accumuler les rayons $R_a(\theta)$ contenus dans U et, par suite, tous ces rayons convergent vers x. Les angles de ces rayons forment un intervalle de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et, comme la multiplication par deux est dilatante, on voit que tout rayon issu de a aboutit en x, ce qui est absurde. □

2.3 LE CAS HYPERBOLIQUE

On suppose ici que $-a$ se trouve soit dans $B(a)$, soit dans $B(\infty)$. On note $P(f)$ l'ensemble post-critique de f — *i.e.* l'adhérence des orbites positives de tous les points critiques de f — et on pose $U = \widehat{\mathbf{C}} \setminus P(f)$. Comme $P(f)$ contient au moins $-a$, a et ∞, le revêtement universel $\widetilde{U}$ de U est un disque — sauf si $a = 0$, auquel cas l'ensemble de Julia est exactement le cercle

unité puisque $f(x) = x^{d+1}$ — et on désigne par π la projection $\widetilde{U} \to U$. Par ailleurs, $f^{-1}(U) \subset U$ car f envoie $P(f)$ dans lui-même.

LEMME 2.6. *Au voisinage de $J(f)$, l'application f dilate exponentiellement la métrique hyperbolique de U.*

Preuve. On va construire une application holomorphe g de $\widetilde{U}$ dans $\pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big) \subset \widetilde{U}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big) \arrow[d, "\pi"] \\ U & f^{-1}(U) \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

et a un point fixe attractif. Le lemme découle alors du fait que, d'après le lemme de Schwarz, g contracte exponentiellement la métrique hyperbolique du disque $\widetilde{U}$ sur tout compact de $\widetilde{U}$.

Pour trouver g, on note d'abord que $J(f)$ contient au moins un point fixe répulsif, par exemple le point d'aboutissement y_0 du rayon $R_a(0)$ (celui-ci n'est pas parabolique car il n'est pas dans $P(f)$). D'autre part, $f : f^{-1}(U) \to U$ est une application holomorphe propre sans points critiques, donc un revêtement. On obtient g en relevant $\pi : \widetilde{U} \to U$ à ce revêtement puis à $\pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big)$ en une application fixant une préimage de y_0 dans $\widetilde{U}$. $\square$

On suppose maintenant que $-a$ est dans $B(\infty)$. Si $\phi_a : \mathbf{D} \to B(a)$ est une représentation conforme fournie par la proposition 2.3, on regarde les applications

$$\gamma_n : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow \widehat{\mathbf{C}}, \quad t \longmapsto \gamma_n(t) = \phi_a\big((1/2)^{1/d^n} e^{2i\pi t}\big) .$$

LEMME 2.7. *La suite γ_n converge uniformément vers une application surjective de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ dans $\partial B(a)$. Par suite, $\partial B(a)$ est localement connexe.*

Preuve. Pour n_0 assez grand, l'image de γ_{n_0} est dans le voisinage de $J(f)$ où f dilate la métrique hyperbolique de U. On note alors $\lambda > 1$ la constante de dilatation de la métrique et on pose

$$C = \sup\{\mathrm{dist}_U\big(\gamma_{n_0}(t), \gamma_{n_0+1}(t)\big),\ t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\} .$$

Le fait que f envoie chaque rayon dans $B(a)$ sur un autre rayon assure que, pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$,

$$\mathrm{dist}_U\big(\gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t)\big) \leq C\lambda^{n_0-n},$$

ce qui entraîne la convergence uniforme voulue. $\square$

Si maintenant $-a$ est dans $B(a)$, alors $f^{-1}\big(B(a)\big) = B(a)$. Il en découle l'égalité $\partial B(a) = J(f) = \partial B(\infty)$. En effet, tout point x qui n'est pas dans $\bar{B}(a)$ a un voisinage V disjoint de $\bar{B}(a)$. Par suite, toutes ses images itérées $f^n(V)$ évitent $\bar{B}(a)$, ce qui montre que la famille $\{f^n\}$ est normale sur V, donc que x n'appartient pas à $J(f)$. On applique alors à une représentation de Böttcher $\phi\colon \mathbf{D} \to B(\infty)$ le même raisonnement que plus haut pour montrer que $\partial B(a)$ est une image continue du cercle.

Il reste à voir que $\partial B(a)$ est bien une courbe de Jordan. On distingue deux cas :

Si $-a$ est dans $B(\infty)$, la représentation conforme $\phi_a\colon \mathbf{D} \to B(a)$ est bien définie et le résultat découle alors du lemme 2.5.

Si $-a$ est dans $B(a)$, en conjuguant f par une transformation de Mœbius Φ qui échange a et ∞, on obtient un polynôme g qui possède un point fixe super-attractif $\Phi(\infty)$ et dont le bassin immédiat $(\Phi(B(\infty)))$ ne contient pas d'autres points critiques. Dans ce cas on a bien une représentation conforme du bassin immédiat à laquelle on peut alors appliquer le lemme 2.5.

2.4 Construction de graphes admissibles

On suppose désormais que le point critique libre $-a$ n'est ni dans $B(a)$ ni dans $B(\infty)$ et on regarde le polynôme f comme une application à allure rationnelle de X' dans X où

$$X = \mathbf{C} \setminus \Big(\phi_a\big((1/2)\overline{\mathbf{D}}\big) \cup \phi\big((1/2)\overline{\mathbf{D}}\big)\Big) \quad \text{et} \quad X' = f^{-1}(X).$$

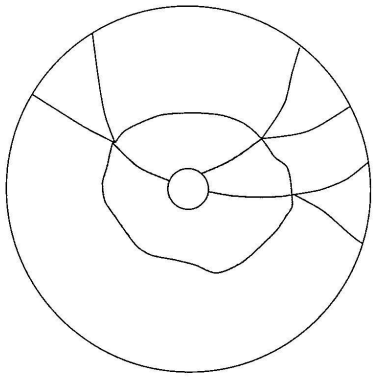

FIGURE 1

Le graphe $\Gamma(\theta)$ avec, en gris, le bassin immédiat $B(a)$ privé de $\phi_a\big((1/2)\mathbf{D}\big)$

Pour construire un graphe admissible, on observe d'abord que, pour tout $l \geq 1$, l'angle $\theta = 1/(d^l - 1)$ est, modulo 1, l-périodique par multiplication par d. D'après le théorème 2.4-a), le rayon $R_a(\theta)$ converge donc vers un point périodique x répulsif ou parabolique. En prenant l assez grand, on s'assure d'une part que l'orbite positive du point critique $-a$ est disjointe de celle de x et d'autre part que x est répulsif (en effet, f possède au plus une orbite périodique parabolique car tout orbite de ce type attire un point critique). Le théorème 2.4-b) fournit alors un rayon externe périodique $R(\eta)$ qui aboutit en x. Avec ces rayons, on forme*) le graphe admissible suivant:

$$\Gamma(\theta) = \partial X \cup \left(X \cap \left(\bigcup_{i \geq 0} \bar{R}_a(d^i\theta) \cup R\big((d+1)^i\eta\big) \right) \right).$$

Sur le cercle identifié à $[0,1]/(0 \sim 1)$, les angles $d^i\theta$, $0 \leq i \leq l-1$, sont rangés en ordre croissant. On va maintenant vérifier que le graphe $\Gamma(\theta)$ satisfait les hypothèses du théorème 1.10.

On distingue deux types de pièces de profondeur 0 découpées par $\Gamma(\theta)$, selon que leur bord est formé, en dehors de ∂X, de quatre rayons — deux dans $B(a)$, deux dans $B(\infty)$ — ou simplement de deux rayons externes. Comme on s'intéresse surtout aux pièces du premier type, on appellera *losange* tout ouvert de $\widehat{\mathbf{C}}$ dont la frontière est l'adhérence d'exactement quatre rayons d'angles rationnels dont deux sont dans $B(a)$ et les deux autres dans $B(\infty)$. Les propriétés suivantes sont immédiates:

1) tout losange rencontre $B(a) \setminus \{a\}$ suivant une partie stricte;
2) si U et V sont deux losanges tels que $\bar{U} \cap \bar{V} \cap B(a) = \{a\}$, alors $\bar{U} \cap \bar{V} = \{a, \infty\}$;
3) l'union de deux losanges qui s'intersectent est soit un losange, soit $\widehat{\mathbf{C}} \setminus \{a, \infty\}$;
4) si U et V sont deux losanges tels que $f(\partial U) = \partial V$, $f(U)$ rencontre $V \cap B(a)$ et si U intersecte $B(a)$ dans un secteur angulaire d'ouverture strictement inférieure à $1/d$ (*i.e.* si $\theta_1 < \theta_2$ sont les arguments des rayons de $\partial U \cap B(a)$ alors $\theta_2 - \theta_1 < 1/d$), alors $U \cap \bar{B}(a) \subset f^{-1}(V)$.

Pour le point 4), il suffit de voir que $U \cap B(a)$ ne coupe pas de préimages du bord de V. Ceci découle du fait que l'ouverture angulaire est trop petite pour intersecter $f^{-1}(\partial V) \cap B(a)$, puisque ∂U est déjà dans $f^{-1}(\partial V)$. Par suite, f envoie $U \cap B(a)$ dans $V \cap B(a)$, d'où l'affirmation.

---

*) Souvent, par abus de langage, on dira qu'un rayon fait partie de l'adhérence ou du bord d'une pièce si cet ensemble contient au moins deux points du rayon. D'autre part, par extension, on appellera encore rayon toute préimage itérée d'un rayon de $B(a)$.

On note $\Gamma_1(\theta)$ le graphe $f^{-1}\big(\Gamma(\theta)\big)$. Les rayons de $B(a)$ qui font partie de $\Gamma_1(\theta)\setminus\Gamma(\theta)$ ont pour angles les $d^i\theta+(j/d)$, $0\le i\le l-1$, $1\le j\le d-1$, qui sont tous dans l'intervalle du cercle contenant 0 et délimité par $\theta+(1/d)$ et θ/d (voir la figure 2). On se donne d'autre part un losange $U(\theta)$ qui contient $R_a(0)\setminus\{a\}$ et est bordé par $R_a(\theta+(1/d))$, $R_a(\theta/d)$ et deux rayons externes faisant partie de $\Gamma_1(\theta)$.

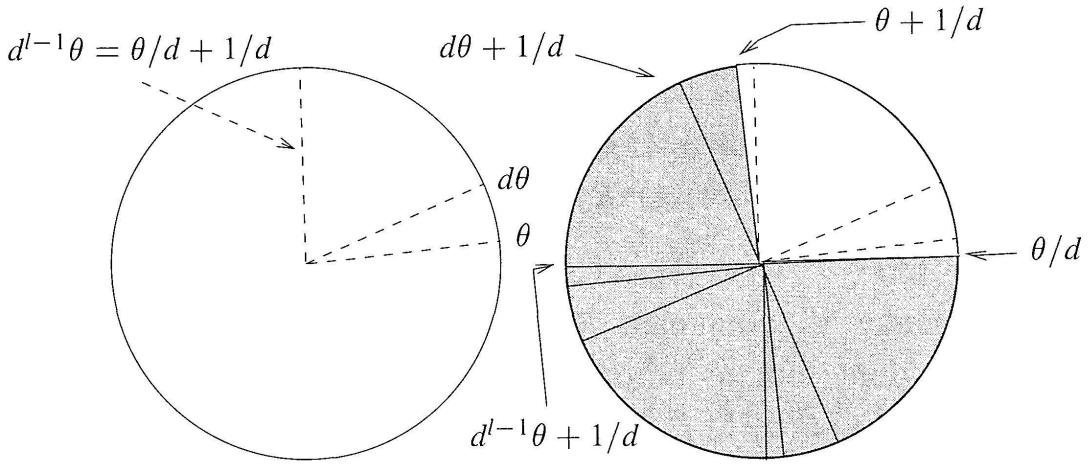

FIGURE 2

Le cas $d=4$, $l=3$ vu dans $\mathbf{D}$ via ϕ_a avec, en pointillés, $B(a)\cap\Gamma(\theta)$, en continu, $B(a)\cap\big(\Gamma_1(\theta)\setminus\Gamma(\theta)\big)$ et, en gris, $U(\theta)\cap B(a)$

LEMME 2.8. *Tout point de $J(f)\cap\big(U(\theta)\setminus\Gamma_1(\theta)\big)$ est bagué par $\Gamma(\theta)$ à la profondeur* 0.

Preuve. L'intersection $U(\theta)\cap X'$, qui est une union de pièces de profondeur 1, est relativement compacte dans la pièce de profondeur 0 qui rencontre $R_a(0)$ et qu'on note P_0 (voir la figure 2). En effet, P_0 est la trace sur X d'un losange $\widehat{P}_0$ bordé dans $B(a)$ par $R_a(\theta)$ et $R_a(\theta/d+1/d)$. Comme $1>\theta+1/d>\theta/d+1/d$ et $0<\theta/d<\theta$, l'intersection $\overline{U}(\theta)\cap(\mathbf{C}\setminus\widehat{P}_0)\cap B(a)$ est réduite à a. Par suite, $\overline{U}(\theta)$ et $\mathbf{C}\setminus\widehat{P}_0$ ne se touchent qu'en a — propriété 2) des losanges. Ainsi, $\overline{U}(\theta)\cap\overline{X}'\subset P_0$. $\square$

LEMME 2.9. *Soit $\theta=1/(d^l-1)$ et $\theta'=1/(d^{l'}-1)$ avec $l'>l+1$ et l assez grand. Tout point de $\partial B(a)$ est bagué à une profondeur bornée par l'un des graphes $\Gamma(\theta)$ ou $\Gamma(\theta')$.*

Preuve. On remarque tout d'abord que

$$\Big(\big(U(\theta)\setminus\Gamma_1(\theta)\big)\cup\big(U(\theta')\setminus\Gamma_1(\theta')\big)\Big)\cap X'=\big(U(\theta)\cup U(\theta')\big)\cap X'$$

car les graphes $\Gamma_1(\theta)$ et $\Gamma_1(\theta')$ sont disjoints dans X'. Par suite, il suffit de montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\bigcup_{0 \leq i \leq n} f^{-i}\big(U(\theta) \cup U(\theta')\big)$ contienne $\partial B(a)$.

L'ouvert $U(\theta) \cup U(\theta')$ est un losange que l'on note V_0, les rayons de $B(a)$ inclus dans ∂V_0 sont d'angles $\eta = \theta' + 1/d$, $\zeta = \theta/d$. On note n le plus petit entier tel que $\eta/d^n < \zeta$, on va construire, pour $0 \leq m \leq n$, un ouvert V_m ayant les propriétés suivantes :

- $V_m \cap \partial B(a)$ est inclus dans $\bigcup_{0 \leq i \leq m} f^{-i}(V_0)$;
- V_m, pour $m < n$, est un losange qui contient $R_a(1/d^m)$ et est bordé dans $B(a)$ par $R_a(\eta/d^m)$ et $R_a(\zeta)$;
- $V_n = \mathbf{C} \setminus \{a\}$.

Il existe un losange V_1' contenant $R_a(1/d)$ et bordé dans $B(a)$ par $R_a(\eta/d)$, $R_a(\zeta/d + 1/d)$, dont tout le bord est inclus dans $f^{-1}(\partial V_0)$. Alors, d'après la propriété 4), $V_1' \cap \bar{B}(a) \subset f^{-1}(V_0)$. Comme $\zeta/d + 1/d > \eta$, les losanges V_1' et V_0 s'intersectent et $V_1 = V_0 \cup V_1'$ est un losange ayant les propriétés demandées. On construit de même un losange V_m' pour tout $m \leq n$ et on pose $V_m = V_m' \cup V_{m-1}$. $\square$

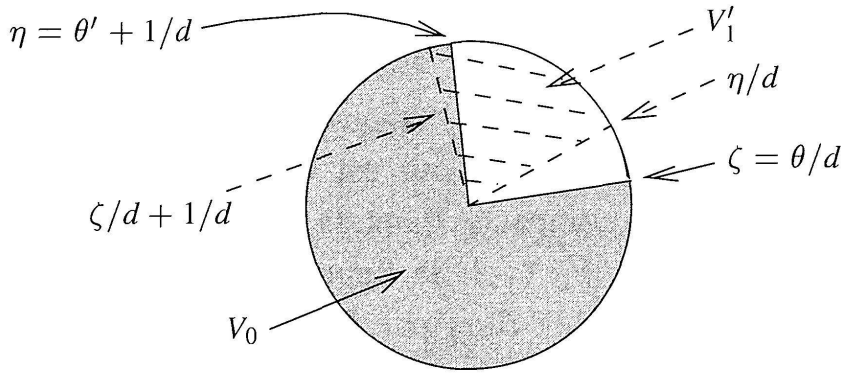

FIGURE 3

Illustration de la démonstration du lemme 2.9

REMARQUES.

a) Toutes les constructions précédentes et en particulier les lemmes 2.8 et 2.9 restent évidemment valables si on prend des graphes d'angle opposé *i.e.* d'angle $1 - \theta$ avec θ toujours de la forme $1/(d^l - 1)$.

b) La profondeur à laquelle on parvient à baguer les points de $\partial B(a)$ est bornée indépendamment du point considéré, mais croît avec l et l'. Ce fait est

insignifiant puisque l'on obtient finalement, d'après le lemme 1.12, que tout point de $\partial B(a)$ est infiniment bagué par un graphe $\Gamma(\theta)$ avec $\theta = 1/(d^l - 1)$ et l assez grand.

D'après la remarque b) précédente, il reste à baguer le point critique $-a$ (qui se trouve dans $K(f)$) et conclure par le théorème 1.10. On a le lemme suivant :

LEMME 2.10. *Il existe $l_0 \in \mathbf{N}$ et $\delta \in \{\pm 1\}$ dépendant uniquement de a tels que pour tout $l > l_0$, le point critique libre $-a$ est bagué à la profondeur 0 ou 1 par $\Gamma(\delta\theta)$ où θ est de la forme $1/(d^l - 1)$.*

On assimile dans cet énoncé $-\theta$ et $1 - \theta$.

Preuve. Pour $d > 2$, et l assez grand, l'ensemble $U(\theta)$ contient tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [1/2, 1]$ et $U(1-\theta)$ tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [0, 1/2]$. De ce fait, $U(\theta) \cup U(1-\theta)$ contient $B(a) \setminus \{a\}$; c'est donc $\mathbf{C} \setminus \{a\}$ en vertu des propriétés 1) et 3) des losanges. De plus, comme les graphes sont admissibles (on prend l_0 grand dans ce but), $-a$ n'est sur aucun graphe de profondeur 1. Ceci résout le cas $d > 2$.

Pour $d = 2$, l'ouvert $U(\theta) \cup U(1-\theta)$ ne recouvre plus $B(a)$. Néanmoins, pour tout $l > -\log\varepsilon/\log d$ où ε est un rationnel petit, $U(\theta)$ contient tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [1/2+\varepsilon, 1]$ et $U(1-\theta)$ tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [0, 1/2-\varepsilon]$. On suppose donc désormais que le point critique $-a$ est dans un losange V bordé par $R_a(1/2+\varepsilon)$, $R_a(1/2-\varepsilon)$ et contenant $R_a(1/2)$. Pour voir que $-a$ est bagué à la profondeur 1, comme a priori il se peut que V contienne une partie d'une préimage de $B(a)$, on va montrer que la valeur critique $f(-a)$ est baguée à la profondeur 0 et plus précisément qu'elle se trouve dans $\mathbf{C} \setminus V \subset U(\theta) \cup U(1-\theta)$.

On suppose donc que $f(-a)$ est dans V, qui est un disque. Comme f est de degré 3 et que $-a$ est simple, $f^{-1}(V)$ est formé de deux disques et ceux-ci ne touchent pas $f^{-1}(\partial V)$. Or il y a deux losanges V_1, V_2 évidents qui ont leur bord inclus dans $f^{-1}(\partial V)$, contiennent respectivement $R_a(1/4)$, $R_a(3/4)$ et vérifient

$$R_a\left(\frac{1}{4} \pm \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \partial V_1 \quad \text{et} \quad R_a\left(\frac{3}{4} \pm \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \partial V_2 .$$

Par suite, les deux composantes de $f^{-1}(V)$ sont incluses dans $V_1 \cup V_2$ qui contient donc $-a$ et est disjoint de V. $\square$

En résumé, les lemmes 2.9, 2.10 et 1.12 garantissent que, pour tout point x de $\partial B(a)$, l'un des graphes $\Gamma(\theta)$, ou $\Gamma(1-\theta)$ bague infiniment x et bague le point critique $-a$. Le théorème de Yoccoz 1.10 et le lemme 2.11 ci-dessous assurent alors que $\partial B(a)$ est localement connexe en x ce qui achève la preuve du théorème 2.1, sauf dans la cas où le bout de $-a$ est périodique et si x tombe dans $\mathrm{Imp}(-a)$ par itération. C'est ce cas qu'il reste à étudier dans la partie suivante 2.5.

Pour trouver des voisinages connexes d'un point x de $\partial B(a)$, on va extraire de chaque intersection $\bar{P}_n(x) \cap \partial B(a)$ un voisinage connexe de x dans $\partial B(a)$ qui est de la forme $\bigcap_{u \in]0,1[} \bar{Q}(u, \tau, \tau')$ avec $\tau, \tau' \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où

$$Q(u, \tau, \tau') = \left\{ \phi_a(r\, e^{2i\pi t}) \mid r \in]u, 1[,\ t \in]\tau, \tau'[\right\} .$$

LEMME 2.11. *Tout point x de $\partial B(a)$ dont l'impression $\bigcap_{n \geq 0} P_n(x)$ est réduite à x possède un système fondamental de voisinages connexes dans $\partial B(a)$.*

Preuve. Toute pièce de profondeur n rencontre $B(a)$ suivant des secteurs du type $Q(2^{-1/d^n}, \tau, \tau')$ car son bord est formé, dans $B(a)$, (de morceaux) de rayons rationnels et de l'équipotentielle de niveau $2^{-1/d^n}$. Par ailleurs, comme x appartient à $P_n(x) \cap \partial B(a)$, il possède un voisinage dans $P_n(x)$ qui rencontre $B(a)$. Ce voisinage rencontre alors un secteur $Q(2^{-1/d^n}, \tau, \tau') \subset P_n(x) \cap B(a)$ où $R_a(\tau)$, $R_a(\tau')$ font partie de $\partial P_n(x)$. Ainsi, l'intersection

$$U_n = \bigcap_{u \in]0,1[} \bar{Q}(u, \tau, \tau') \subset \bar{P}_n(x)$$

est un voisinage de x dans $\partial B(a)$, compact et connexe (c'est une intersection décroissante de parties compactes connexes). Comme l'intersection des pièces $P_n(x)$ se réduit au point x, la suite U_n constitue un système fondamental de voisinages connexes de x dans $\partial B(a)$. $\square$

2.5 CAS D'UN BOUT CRITIQUE PÉRIODIQUE

On considère à présent le graphe Γ parmi $\Gamma(\theta)$ et $\Gamma(1-\theta)$ qui bague le point critique libre $-a$ (à la profondeur 0 ou 1) et on suppose que le bout de $-a$ est k-périodique. D'après le théorème de Yoccoz 1.10, l'application $f^k \colon P_{m+k}(-a) \to P_m(-a)$ est à allure quadratique — pour un entier m assez grand — et son ensemble de Julia rempli K est l'impression $\mathrm{Imp}(-a) = \bigcap_{n \geq 0} P_n(-a)$. Deux cas se présentent alors. Si $\bar{B}(a)$ n'intersecte pas K, la connexité locale de $\partial B(a)$ découle encore une fois du théorème de

Yoccoz 1.10 et du lemme 2.11, car aucun point de $\partial B(a)$ ne tombe dans K par itération et toutes les impressions sont donc réduites à des singletons. Sinon, on montre que $\partial B(a) \cap K$ est formé d'au plus un point (lemme 2.13) qui est un point fixe par f^k noté β. Il en résulte que, si l'orbite d'un point $x \in \partial B(a)$ passe dans K, la suite des parties $\bar{P}_n(x) \cap \partial B(a)$ forme, dans $\partial B(a)$, un système fondamental de voisinages de x puisque leur intersection est réduite à une préimage itérée de $\partial B(a) \cap K \subset \{\beta\}$. Le lemme 2.11 permet alors de conclure que $\partial B(a)$ est localement connexe en x. Ce qui achève la preuve du théorème 2.1.

Dorénavant, on suppose que $K \cap \partial B(a) \neq \varnothing$ et dans la fin de cet article on montre que $\partial B(a) \cap K$ est formé d'au plus un point. Dans un premier temps, on trouve un point répulsif ou parabolique dans $K \cap \partial B(a)$:

LEMME 2.12. *Il existe dans $B(a)$ un rayon $R_a(\eta)$ qui est k-périodique par f et aboutit en un point $\beta \in K \cap \partial B(a)$ — fixe par f^k.*

Preuve. On reprend les notations données juste avant le lemme 2.11. On montre tout d'abord (par récurrence sur n) que, si une pièce P_n de profondeur n rencontre $B(a)$, l'intersection $P_n \cap B(a)$ est formée d'un seul secteur du type $Q(u, \tau, \tau')$, où l'intervalle $]\tau, \tau'[$ du cercle a une longueur strictement inférieure à $1/d^{n+1}$.

Une pièce P_0 de profondeur 0 a clairement cette propriété. D'autre part, toute pièce P_{n+1} de profondeur $n+1$ est contenue dans une pièce P'_n de profondeur n et a pour image par f une (autre) pièce P_n de profondeur n. Par hypothèse de récurrence, $P_n \cap B(a)$ est du type $Q(u_n, \tau_n, \tau'_n)$, avec $|\tau'_n - \tau_n| < 1/d^{n+1}$. L'ouvert $Q(u_n, \tau_n, \tau'_n)$ a donc d préimages dans $B(a)$, qui sont de la forme

$$Q\Big(u, \tau + \frac{i}{d}, \tau' + \frac{i}{d}\Big), \qquad 0 \leq i \leq d-1\,,$$

où $u = u_n^{1/d}$ et $|\tau' - \tau| < 1/d^{n+2}$. L'intersection $P_{n+1} \cap B(a)$ coïncide alors avec l'un de ces secteurs ouverts : elle en contient un tout entier car elle est bordée par des rayons préimages de ceux qui bordent P_n et elle ne peut en contenir deux car deux tels secteurs diffèrent de $1/d$ alors que la pièce $P'_n \supset P_{n+1}$ rencontre $B(a)$ dans un secteur d'ouverture $< 1/d$ (hypothèse de récurrence). On choisit alors τ, τ' pour que

$$P_{n+1} \cap B(a) = Q(u, \tau, \tau')\,.$$

Soit maintenant x un point de $K \cap \partial B(a)$. S'il se trouve sur une préimage Γ_n du graphe Γ, c'est immédiatement le point d'aboutissement d'un rayon

prépériodique de $B(a)$. En prenant son image par un itéré convenable de f, on obtient un rayon périodique qui converge vers un point $\beta \in K \cap \partial B(a)$ fixe par f^k. Si x n'est sur aucune préimage du graphe, la pièce $P_n(x)$ rencontre $B(a)$ suivant un secteur de la forme $Q(2^{-1/d^n}, \tau_n, \tau'_n)$ avec $|\tau_n - \tau'_n| < 1/d^n$. Les angles (τ_n), (τ'_n) forment des suites adjacentes dont on note η la limite commune. Comme $x \in K \subset P_n(-a)$, nécessairement $P_n(x) = P_n(-a)$ et, de ce fait,

$$f^k\big(P_{n+k}(x) \cap B(a)\big) = P_n(x) \cap B(a)$$

pour n assez grand. Par suite, $d^k\eta$ est dans l'intervalle $]\tau_n, \tau'_n[\subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, de sorte que $d^k\eta = \eta$. Le rayon d'angle η converge alors vers un point β (théorème 2.4). Ce point β est fixe par f^k et, comme il se trouve dans toutes les pièces $P_n(-a)$, il est dans $K \cap \partial B(a)$. $\square$

LEMME 2.13. *Il existe deux rayons externes $R(\zeta)$, $R(\zeta')$, d'angles ζ, ζ' rationnels, qui aboutissent au point β et sont tels que la courbe de Jordan $R(\zeta) \cup R(\zeta') \cup \{\beta\}$ sépare $K \setminus \{\beta\}$ de $\bar{B}(a) \setminus \{\beta\}$.*

Preuve. Dans la preuve du lemme 2.12, on a vu que $P_n(-a) \cap B(a)$ est de la forme $Q(2^{-1/d^n}, \tau_n, \tau'_n)$. Les rayons $R_a(\tau_n)$, $R_a(\tau'_n)$ convergent vers des points y_n, y'_n de $\partial B(a)$ en lesquels aboutissent aussi des rayons externes qui font partie de $\partial P_n(-a)$ et qu'on note respectivement $R(\zeta_n)$, $R(\zeta'_n)$. La suite ζ_n (resp. ζ'_n) est alors croissante majorée (resp. décroissante minorée) et converge donc vers un angle limite ζ (resp. ζ'). De plus, comme f^k est un homéomorphisme local en les points y_n, y'_n et que $f^k\big(\bar{P}_{n+k}(-a)\big) = \bar{P}_n(-a)$ pour n assez grand,

$$f^k\big(R(\zeta_{n+k})\big) = R(\zeta_n), \quad \text{et} \quad f^k\big(R(\zeta'_{n+k})\big) = R(\zeta'_n).$$

Il en résulte que $(d+1)^k\zeta_{n+k} = \zeta_n$ (dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$) et, par suite, que ζ est périodique de période divisant k. Les rayons $R(\zeta)$, $R(\zeta')$ convergent ainsi vers des points y, y' qui sont fixes par f^k et qui appartiennent à K — car la partie des rayons $R(\zeta)$, $R(\zeta')$ située au-delà du potentiel $2^{-1/d^n}$ se trouve dans $\bar{P}_n(-a)$.

D'autre part, le théorème de redressement de A. Douady et J. H. Hubbard [DH2, théorème 1] montre que f^k est conjuguée à un polynôme quadratique $f_c(z) = z^2 + c$ par un homéomorphisme σ d'un voisinage de K sur un voisinage de l'ensemble de Julia rempli K_c de f_c. Les points $\sigma(\beta)$, $\sigma(y)$ et $\sigma(y')$ sont des points fixes de f_c en lesquels aboutissent des arcs externes fixes par f_c — à savoir $\sigma\big(R_a(\eta)\big)$, $\sigma\big(R(\zeta)\big)$ et $\sigma\big(R(\zeta')\big)$. Or un polynôme quadratique possède au plus deux points fixes parmi lesquels un seul — généralement

noté β_c — est l'aboutissement d'un arc externe fixe [P, théorème A]. Par suite, $R(\zeta)$, $R(\zeta')$ convergent nécessairement vers β.

Finalement, $\bar{R}(\zeta)\cup\bar{R}(\zeta')$ forme une courbe de Jordan qui sépare $K\setminus\{\beta\}$ de $\bar{B}(a)\setminus\{\beta\}$. En effet, le losange V_n bordé par $\bar{R}_a(\tau_n)$, $\bar{R}_a(\tau_n')$, $\bar{R}(\zeta_n)$ et $\bar{R}(\zeta_n')$ contient la pièce $P_n(-a)$ par construction. Il contient donc K et, par suite, au moins un point périodique répulsif p (différent de β) et un rayon externe qui converge vers p, de sorte que $\zeta\neq\zeta'$. Ainsi, la composante connexe U de $\mathbf{C}\setminus\left(\bar{R}(\zeta)\cup\bar{R}(\zeta')\right)$ qui contient p contient $K\setminus\{\beta\}$ — car K ne peut rencontrer la courbe $\bar{R}(\zeta)\cup\bar{R}(\zeta')$ qu'en β et ce point ne disconnecte par K [M, théorème 6.10]. □

RÉFÉRENCES

[A] AHLFORS, L. V. *Lectures on Quasiconformal Mappings.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, California, 1987*).

[B] BÖTTCHER, L. Les lois principales de la convergence des itérés et leur application en analyse (en russe). *Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch. 14* (1904), 155–234.

[BH] BRANNER, B. and J. H. HUBBARD The iteration of cubic polynomials II, patterns and parapatterns. *Acta Math. 169* (1992), 229–325.

[C] CARATHÉODORY, C. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. *Math. Ann. 73* (1913), 323–370.

[DH1] DOUADY, A. et J. H. HUBBARD *Étude dynamique des polynômes complexes.* Publ. math. d'Orsay, 1984.

[DH2] DOUADY, A. et J. H. HUBBARD On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann. sci. École Norm. Sup. (4) 18* (1985), 287–343.

[F] FATOU, P. Sur les équations fonctionnelles (trois mémoires). *Bull. Soc. Math. France 47* (1919), 161–271, *48* (1920), 33–94 et 208–314.

[Fa] FAUGHT, D. Local connectivity in a family of cubic polynomials. Thèse de l'Université de Cornell, 1992.

[H] HUBBARD, J. H. Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.-C. Yoccoz. In: *Topological Methods in Modern Mathematics*, L. R. Goldberg and A. V. Phillips eds, 467–511. Publish or Perish, Houston, 1993.

[J] JULIA, G. Mémoire sur l'itération des applications fonctionnelles. *J. Math. Pures Appl. 8* (1918), 47–245.

[M] MCMULLEN, C. *Complex Dynamics and Renormalization.* Annals of Mathematics Studies *135*. Princeton University Press, Princeton, 1994.

*) Réimpression du manuscrit *Lectures on Quasiconformal Mappings.* Van Nostrand Mathematical Studies, No. 10 D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.–New York–London, 1966.