Objekttyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 45 (1999), p. 83–131

COUNTING PATHS IN GRAPHS

by Laurent BARTHOLDI

ABSTRACT. We give a simple combinatorial proof of a formula that extends a result by Grigorchuk [Gri78a, Gri78b] relating cogrowth and spectral radius of random walks. Our main result is an explicit equation determining the number of 'bumps' on paths in a graph: in a d-regular (not necessarily transitive) non-oriented graph let the series $G(t)$ count all paths between two fixed points weighted by their length t^{length}, and $F(u,t)$ count the same paths, weighted as $u^{\text{number of bumps}}t^{\text{length}}$. Then one has

$$\frac{F(1-u,t)}{1-u^2t^2} = \frac{G\left(\frac{t}{1+u(d-u)t^2}\right)}{1+u(d-u)t^2}\,.$$

We then derive the circuit series of 'free products' and 'direct products' of graphs. We also obtain a generalized form of the Ihara-Selberg zeta function [Bas92, FZ98].

1. INTRODUCTION

Let $\Gamma = \mathbf{F}_S/N$ be a group generated by a finite set S, where $\mathbf{F}_S$ denotes the free group on S. Let f_n be the number of elements of the normal subgroup N of $\mathbf{F}_S$ whose minimal representation as words in $S \cup S^{-1}$ has length n; let g_n be the number of (not necessarily reduced) words of length n in $S \cup S^{-1}$ that evaluate to 1 in Γ; and let $d = |S \cup S^{-1}| = 2|S|$. The numbers

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n}\,, \qquad \nu = \frac{1}{d}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{g_n}$$

are called the *cogrowth* and *spectral radius* of (Γ, S). The Grigorchuk Formula [Gri78b] states that

$$\nu = \begin{cases} \frac{\sqrt{d-1}}{d}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{d-1}} + \frac{\sqrt{d-1}}{\alpha}\right) & \text{if } \alpha > \sqrt{d-1}\,, \\ \frac{2\sqrt{d-1}}{d} & \text{else}\,. \end{cases} \tag{1.1}$$