Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 42 (1996)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EMPILEMENTS DE CERCLES ET REPRÉSENTATIONS CONFORMES: une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan

Autor: Mathéus, Frédéric

Kapitel: IV. Estimations à priori des rayons

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87874

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

PROPOSITION (Lemme de Schwarz-Pick discret dans [B-St2]).

i) (monotonie). Si $r_s \leqslant r'_s$ *pour tout sommet frontière* s, *alors* $r_s \leqslant r'_s$ *pour tout sommet intérieur* s. *De plus, si* $r_{s_0} = r'_{s_0}$ *pour un sommet intérieur* s_0 *alors* $\forall s \in S$, $r_s = r'_s$;

ii) (lemme de Schwarz discret). Si $\mathscr{C}'$ *est un empilement d'Andreev (i.e.* $r'_s = +\infty$ *pour* $s \in B$*) alors* $r_s \leqslant r'_s$, $\forall s \in S$;

iii) (lemme de Pick discret). Si $\mathscr{C}'$ *est un empilement d'Andreev alors la distance entre deux sommets* s_0 *et* s_1 *dans* $\mathscr{E}_r$ *est inférieure à la distance entre les deux sommets correspondants dans* $\mathscr{E}_{r'}$.

Preuve de la proposition. Prouvons le point *i)*. On réalise la variété $\mathscr{E}_{r'}$, comme le temps 1 d'une déformation $\{\mathscr{E}_r(t);\, t \in [0, 1]\}$ de la variété $\mathscr{E}_r$ comme ci-avant, à ceci près que les rayons frontières de $\mathscr{E}_r(t)$ sont définis par

$$u_s(t) = \Psi(r_s(t)) = (1-t)\Psi(r_s) + t\Psi(r'_s)\,.$$

Pour tout t, il existe un opérateur de Schrödinger discret $\Delta^t + V^t$ sur $\mathscr{E}^1$ (le 1-squelette de $\mathscr{E}$) tel que:

$$\begin{cases} \Delta^t \dot{u}(t) + V^t \dot{u}(t) = 0 \\ \dot{u}_s(t) = \Psi(r'_s) - \Psi(r_s) \quad \text{si } s \in B. \end{cases}$$

Comme Ψ est décroissante, on a $\dot{u}_s(t) \leqslant 0$, $\forall s \in B$. D'après le principe du maximum pour les opérateurs de Schrödinger on a également $\dot{u}_s(t) \leqslant 0$ pour tout sommet intérieur s, donc $\Psi(r'_s) \leqslant \Psi(r_s)$ donc $r'_s \geqslant r_s$ pour ces sommets. De plus, $r_{s_0} = r'_{s_0}$ pour un sommet intérieur s_0 implique $\dot{u}_{s_0}(t) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$ donc, d'après le même lemme, $\dot{u}_s(t) = 0$, $\forall t$, $\forall s \in S$ et donc $r_s = r'_s$, $\forall s \in S$.

Les points *ii)* et *iii)* résultent de *(i)*. □

IV. ESTIMATIONS À PRIORI DES RAYONS

Soit K un compact d'intérieur non vide contenu dans $\mathscr{U}$, et S_ε^K l'ensemble des sommets de $\mathscr{E}_\varepsilon$ contenus dans K. On note $\tilde{r}_\varepsilon = (\tilde{r}_\varepsilon^s)_{s \in S_\varepsilon}$ la collection des rayons de l'empilement d'Andreev $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$. Le but de cette section est de démontrer la

PROPOSITION. *Il existe trois constantes* c_1, c_2, c_3 *ne dépendant que de* K *et* $\mathscr{U}$ *telles que, si* ε *est assez petit, alors, pour* s *et* $s' \in S_\varepsilon^K$, *et* $t \in [0, 1]$,

i) $1 \leqslant \frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{r_\varepsilon^s(t)} \leqslant c_1$,

ii) $\frac{1}{c_2} \leqslant \frac{r_\varepsilon^s(t)}{r_\varepsilon^{s'}(t)} \leqslant c_2$,

iii) $\frac{\varepsilon}{c_3} \leqslant r_\varepsilon^s(t) \leqslant c_3\varepsilon$.

Cette proposition a été mise en évidence par Kenneth Stephenson: c'est le lemme 3 de [St1] et le lemme de comparaison 8.4.1 de [St2]. Voir aussi le lemme 8.3.1 de [St3]. Nous en reproduisons ici la démonstration, en suivant [St2]. Celle-ci est assez technique, et utilise à plusieurs reprises le lemme de Schwarz-Pick discret de la section précédente. Il faut tout d'abord un

LEMME DE DISTORSION («Distortion Lemma» 8.3.1 de [St2]). *Soit* $a \in]0, 1[$ *et* $\varepsilon \in]0, \frac{a}{64}[$. *Soit* Δ *le disque ouvert de centre* ζ *et de rayon* a *supposé contenu dans le disque unité. Soit* $\mathscr{C}$ *l'ensemble des cercles de rayon* ε *contenus dans* Δ *et centrés sur* $\zeta + 2\varepsilon\mathbf{Z} + 2\varepsilon e^{\frac{i\pi}{3}}\mathbf{Z}$. *Soit* C_0 *le cercle de* $\mathscr{C}$ *entré en* ζ *et* $\tilde{C}_0$ *le cercle de l'empilement d'Andreev* $\tilde{\mathscr{C}}$ *de* $\mathscr{C}$ *dans* $\mathbf{D}$ *correspondant à* C_0 *et supposé centré en* 0.

Alors on a $\tilde{\rho} \leqslant \frac{\varepsilon}{a - 64\varepsilon}$, *où* $\tilde{\rho}$ *désigne le rayon euclidien du cercle* $\tilde{C}_0$.

Preuve du lemme de distorsion. Il suffit de traiter le cas où $\zeta = 0$ et $a = 1$, le cas général s'en déduisant aussitôt. Notons $\partial\mathscr{C}$ (resp. $\partial\tilde{\mathscr{C}}$) l'ensemble des cercles du bord de $\mathscr{C}$ (resp. $\tilde{\mathscr{C}}$). Soit $\nu\tilde{\mathscr{C}}$ l'homothétique de $\tilde{\mathscr{C}}$ dans l'homothétie (euclidienne) de centre 0 et de rapport ν. Soit C_s un cercle de $\partial\mathscr{C}$ et $\tilde{C}_s$, $\tilde{C}'_s$ les cercles qui lui correspondent dans les empilements $\tilde{\mathscr{C}}$ et $\nu\tilde{\mathscr{C}}$. Notons $\tilde{\rho}_s$ le rayon euclidien de $\tilde{C}_s$. Les rayons euclidiens de C_s et C'_s sont respectivement ε et $\nu\tilde{\rho}_s$. On note enfin r_s et r'_s les rayons hyperboliques de C_s et C'_s (le rayon hyperbolique de $\tilde{C}_s$ vaut $+\infty$). Nous allons démontrer que, lorsque $\nu = 1 - 64\varepsilon$, alors $r'_s \leqslant r_s$.

Commençons par minorer r_s. On observe que $\partial\mathscr{C}$ est contenu dans l'anneau $\{1 - 8\varepsilon < |z| < 1\}$ sur lequel la densité de Poincaré est minorée par $\frac{2}{1-(1-8\varepsilon)^2}$, de sorte que l'on a:

$$r_s \geqslant \frac{2\varepsilon}{1-(1-8\varepsilon)^2} = \frac{2\varepsilon}{16\varepsilon - 64\varepsilon^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-4\varepsilon} > \frac{1}{8}.$$

A présent, majorons r'_s. Comme $\partial\mathscr{C}$ est contenu dans l'anneau $\{1 - 8\varepsilon < |z| < 1\}$, il en est de même pour $\partial\tilde{\mathscr{C}}$ d'après le lemme de

Schwarz-Pick discret, de sorte que $\tilde{\rho}_s < 4\varepsilon$, donc le rayon euclidien de C'_s vérifie $\nu\tilde{\rho}_s < 4\varepsilon\nu$. Par ailleurs, C'_s est contenu dans le disque $\{|z| < \nu\}$ sur lequel la densité de Poincaré est majorée par $\frac{2}{1-\nu^2}$. On en déduit que

$$r'_s \leqslant \frac{2}{1-\nu^2} \times \nu\tilde{\rho}_s \leqslant \frac{2}{1-\nu^2} \times 4\varepsilon\nu = \frac{8\varepsilon}{1-\nu} \times \frac{\nu}{1+\nu} \leqslant \frac{8\varepsilon}{1-\nu} = \frac{1}{8}$$

$$\text{si } \nu = 1 - 64\varepsilon .$$

Nous pouvons conclure: si $\nu = 1 - 64\varepsilon$, alors pour tout sommet frontière s, on a $r'_s \leqslant r_s$. D'après le principe de monotonie du lemme de Schwarz-Pick discret, on a $r'_0 \leqslant r_0$ ou r'_0 et r_0 désignent les rayons hyperboliques des cercles C'_0 et C_0. Ces cercles étant centrés en 0, on a la même inégalité pour leurs rayons euclidiens, à savoir $\nu\tilde{\rho}_0 \leqslant \varepsilon$, d'où

$$\tilde{\rho}_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{1-64\varepsilon}$$

qui est bien l'inégalité annoncée. □

Le lemme que voici, qui peut paraître surprenant au premier abord, est vraiment spécifique à la géométrie hyperbolique (voir [B-St2]):

LEMME. *Soit, dans le disque de Poincaré, un cercle C de rayon r, et $C_1, \ldots, C_n$, n cercles tangents extérieurement à C, d'intérieurs deux à deux disjoints, tels que C_j soit tangent à C_{j+1} et C_n à C_1.*

Alors on a $r < \sqrt{n}$.

Preuve du lemme. Le cercle C est contenu dans un polygone géodésique P à n côtés dont les sommets sont les centres des cercles $C_1, \ldots, C_n$, donc:

$$\text{aire}(C) < \text{aire}(P) \leqslant (n-2)\pi ,$$

et le résultat découle de la formule donnant l'aire d'un disque hyperbolique en fonction de son rayon: $\text{aire}(C) = 4\pi \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right)$ de sorte que

$$\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \leqslant 4\pi \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) < (n-2)\pi < n\pi . \quad \square$$

REMARQUE. L'inégalité optimale est $r \leqslant -\operatorname{Log}\sin\frac{\pi}{n}$ (cf. [B-St3], p. 34 et [M], p. 75).

Preuve de la proposition. Prouvons *i)*. D'après le principe de monotonie du lemme de Schwarz-Pick, on a $\forall t \in [0, 1]$, $r^s_\varepsilon \leqslant r^s_\varepsilon(t) \leqslant \tilde{r}^s_\varepsilon$ de sorte qu'il suffit de comparer les rayons hyperboliques des cercles de $\mathscr{H}_\varepsilon$ et $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$.

Posons $\delta = \operatorname{dist}(K; \mathbf{C} \setminus \mathscr{U})$. On applique le lemme de distorsion au disque $\Delta = \{|z - s| < \delta\}$ où s est un sommet fixé de S_ε^K. L'ensemble $\mathscr{C}$ défini dans l'énoncé du lemme est un sous-empilement de $\mathscr{H}_\varepsilon$, le cercle C_0 est ici le cercle C_ε^s et le cercle $\tilde{C}_0$ est noté $C_s'^s$. Le rayon euclidien ρ_s' de ce dernier cercle vérifie donc

$$\frac{\rho_s'}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\delta - 64\varepsilon} \leqslant \frac{2}{\delta} \text{ dès que } \varepsilon \leqslant \frac{\delta}{128}.$$

Revenons aux empilements $\mathscr{H}_\varepsilon$ et $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$. Quitte à appliquer une transformation de Möbius à $\tilde{\mathscr{H}}_\varepsilon$, on peut toujours supposer que $\tilde{C}_\varepsilon^s$ est centré à l'origine. Notons $\tilde{\rho}_s$ le rayon euclidien de $\tilde{C}_\varepsilon^s$. Comme $\mathscr{C}$ est un sous-empilement de l'empilement $\mathscr{H}_\varepsilon$, il résulte du lemme de Schwarz-Pick *i)* et *ii)* que le rayon hyperbolique de $\tilde{C}_\varepsilon^s$ est inférieur au rayon hyperbolique de $C_\varepsilon'^s$. Comme ces cercles sont centrés en l'origine, ceci reste vrai pour leurs rayons euclidiens. On en déduit:

$$\tilde{\rho}_s \leqslant \rho_s' \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Comme $\tilde{C}_\varepsilon^s$ est centré en 0 et que $\tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant \sqrt{6}$ d'après le dernier lemme, on déduit que $\tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant \frac{2\tilde{\rho}_s}{1-\alpha^2}$ où $\alpha = \frac{e^{\sqrt{6}}-1}{e^{\sqrt{6}}+1}$. Par ailleurs, comme $\varepsilon \leqslant r_\varepsilon^s$ on a $\frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{r_\varepsilon^s} \leqslant \frac{2}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\tilde{\rho}_s}{\varepsilon} \leqslant \frac{4}{\delta(1-\alpha^2)}$ ce qui fournit une constante c_1 ne dépendant que de $\mathscr{U}$ et K.

Prouvons *ii)*. Soit s et $s' \in S_\varepsilon^K$, $t \in [0; 1]$ et $b = \frac{2}{1-(1-\delta)^2}$. Dans la succession d'inégalités qui suit, nous utilisons respectivement: le lemme de Schwarz-Pick discret; le résultat *i)* ci-dessus; la comparaison des rayons euclidiens et hyperboliques de $\mathscr{H}_\varepsilon$ dans la région $\{|z| < 1 - \delta\}$; le fait que le rayon euclidien d'un cercle est toujours inférieur à son rayon hyperbolique; et le principe de monotonie:

$$r_\varepsilon^s(t) \leqslant \tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot r_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot b \cdot \varepsilon \leqslant c_1 \cdot b \cdot r_\varepsilon^{s'} \leqslant c_1 \cdot b \cdot r_\varepsilon^{s'}(t)$$

de sorte que $c_2 = c_1 \cdot b$ convient.

Enfin, prouvons *iii)*. Fixons $s \in S_\varepsilon^K$, et soit b la constante introduite ci-avant. On a $r_\varepsilon^s \leqslant b\varepsilon$. D'après l'inégalité *i)*, on a: $r_\varepsilon^s(t) \leqslant \tilde{r}_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot r_\varepsilon^s \leqslant c_1 \cdot b\varepsilon$. Comme $\varepsilon \leqslant r_\varepsilon^s \leqslant r_\varepsilon^s(t)$, on a l'inégalité cherchée avec $c_3 = c_1 \cdot b (= c_2)$. $\square$