sur les déterminants. Par ailleurs, pour une matrice 2×2, A, le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit

$$A^2 - A(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{2}\,[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2] = 0\,.$$

Donc, si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont n matrices 2×2 inversibles, par une méthode analogue à celle que nous avons développée, tout produit de la forme $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_k^{n_k}$ (avec $n_j \in \mathbf{Z}$ et $X_j \in \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ pour $j = 1, 2, \cdots, n$) a une trace qui s'exprime comme fraction rationnelle à coefficients entiers en les traces des produits $\{A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\}_{i \in I}$ et les traces des matrices $\{A_j^2\}_{j = 1, 2, \cdots, n}$.

Note ajoutée sur épreuves

Au moment de corriger les épreuves, les auteurs ont eu connaissance d'un certain nombre de travaux antérieurs ([9] à [16]) sur le même sujet.

L'existence de P_ω a été prouvée par Horowitz [9]. L'application induite Φ_σ a été considérée (seulement dans le cas où σ est un isomorphisme) également par Horowitz [10] qui a aussi déterminé le noyau de Φ. La considération du polynôme Q_σ est nouvelle. Le lemme 2 de la section II se trouve dans [15].

Certaines démonstrations données ici sont plus simples que celles de Horowitz, bien qu'il y ait des recouvrements. Alors que Horowitz n'utilise que des relations entre traces, nos calculs prennent place dans l'algèbre introduite par Procesi [13] et Razmyslov [14], ce qui simplifie considérablement les calculs. D'ailleurs, Magnus [12] fait allusion à la complexité des démonstrations de certaines identités (par exemple, les lemmes 3 et 4 de la section VI) et demande s'il est possible de les simplifier. Signalons qu'une description complète de l'idéal des relations entre traces a été donnée par Whittemore [16] dans le cas d'un groupe libre à quatre générateurs.

Les articles [11], [13] et [14] traitent des identités pour les matrices $n \times n$.

Références bibliographiques

[1] Allouche, J.-P. et J. Peyrière. Sur une formule de récurrence sur les traces de produits de matrices associées à certaines substitutions. *C. R. Acad. Sc. Paris 302* (II) (1986), 1135-1136.

[2] Culler, Marc and Peter B. Shalen. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. 117* (1983), 109-146.

[3] Kolar, M. and M. K. Ali. Preprint, University of Lethbridge, January 22, 1990; Trace maps associated with general two-letter substitution rules. *Phys. Rev. A*, submitted.

[4] KOLAR, M. and F. NORI. Trace maps of general substitutional sequences. *Phys. Rev. B 42* (1990), 1062-1065.

[5] NEUMANN, B. H. Die Automorphismengruppe der freien. *Math. Ann. 107* (1933), 367-386.

[6] NIELSEN, J. Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzengenden. *Math. Ann. 78* (1918), 385-397.

[7] —— Die Isomorphismen der freien Gruppen. *Math. Ann. 91* (1924), 169-209.

[8] PEYRIÈRE, J. On the trace map for products of matrices associated with substitutive sequences. *J. Stat. Phys. 62* (1991), 411-414.

[9] HOROWITZ, R. D. Characters of Free Groups Represented in the Two-Dimensional Special Linear Group. *Comm. Pure and Applied Math. 25* (1972), 635-649.

[10] —— Induced automorphisms on Fricke Characters of Free Groups. *Trans. Amer. Math. Soc. 208* (1975), 41-50.

[11] LERON, U. Trace Identities and Polynomial Identities of $n \times n$ Matrices. *J. of Algebra 42* (1976), 369-377.

[12] MAGNUS, W. Rings of Fricke Characters and Automorphism Groups of Free Groups. *Math. Z. 170* (1980), 91-103.

[13] PROCESI, C. The Invariant Theory of $n \times n$ Matrices. *Advances in Math. 19* (1976), 306-381.

[14] RAZMYSLOV, Ju. P. Trace Identities of Full Matrix Algebras over a Field of Characteristic Zero. *Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Mat. 38* (1974) No. 4 (en russe); English translation: *Math. USSR Izvestija 8* (1974), 727-760.

[15] TRAINA, C. *Representation of the Trace Polynomial of Cyclically Reduced Words in a Free Group on Two Generators.* Ph.D. Thesis, Polytechnic Institute of New York.

[16] WHITTEMORE, A. On Special Linear Characters of Free Groups of Rank $n \geqslant 4$. *Proc. Amer. Math. Soc. 40* (1973), 383-388.

(Reçu le 16 avril 1992)

Jacques Peyrière

CNRS URA D0757
Université de Paris Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France)

Wen Zhi-Ying et Wen Zhi-Xiong

Université de Wuhan
Mathématiques
Wuhan, Hubei
(République Populaire de Chine)

vide-leer-empty