5.4. Retour aux groupes anisotropes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Remarque. Le th. 4 équivaut à dire que l'*enveloppe* de K est une «forme réelle» anisotrope de H. Il y a donc correspondance bijective entre:

— sous-groupes compacts maximaux de $H(\mathbf{C})$,

— formes réelles anisotropes de H.

En particulier, ces dernières sont *conjuguées entre elles* par les éléments de $H(\mathbf{C})$ (et même par ceux de $H^o(\mathbf{C})$, H^o désignant la composante neutre de H).

5.4. Retour aux groupes anisotropes

Proposition 7. *Soit G un groupe algébrique linéaire réel anisotrope, et soit H un sous-groupe algébrique de G. Soit $V = G/H$ l'espace homogène correspondant* (au sens algébrique). *Alors:*

a) *H est anisotrope.*

b) *L'application canonique $G(\mathbf{R}) \to V(\mathbf{R})$ est surjective* (de sorte qu'on peut identifier $V(\mathbf{R})$ à $G(\mathbf{R})/H(\mathbf{R})$).

c) *Si H est distingué, le groupe quotient G/H est anisotrope.*

La conjugaison de Cartan $g \mapsto \bar{g}$ du th. 2 laisse évidemment stable le sous-groupe $H(\mathbf{C})$ de $G(\mathbf{C})$. Comme $H(\mathbf{C})$ est «de type algébrique», on en conclut que $H(\mathbf{C})$ admet lui-même une décomposition de Cartan $K.P$, où $K = H(\mathbf{C}) \cap G(\mathbf{R}) = H(\mathbf{R})$. Mais alors il est clair que l'adhérence de K pour la topologie de Zariski de H est H tout entier. Cela montre que H est anisotrope, d'où a).

Soit maintenant $v \in V(\mathbf{R})$; soit $g \in G(\mathbf{C})$ un élément dont l'image dans $V(\mathbf{C}) = G(\mathbf{C})/H(\mathbf{C})$ est v. On a $g \equiv \bar{g} \bmod H(\mathbf{C})$. Soit $K_1.P_1$ la décomposition de Cartan de $G(\mathbf{C})$ utilisée plus haut, et écrivons g sous la forme $g = k_1p_1$, avec $k_1 \in K_1$, $p_1 \in P_1$. L'hypothèse $g \equiv \bar{g} \bmod H(\mathbf{C})$ signifie qu'il existe $k \in K$ et $p \in P$ tels que $g = \bar{g}kp$, i.e. $k_1p_1 = k_1p_1^{-1}kp$, d'où $p_1^2 = kp$, ce qui entraîne $k = 1$, $p = p_1^2$. Comme P est stable par extraction de racines carrées, on a $p_1 \in P$. On en conclut que $g \equiv k_1 \bmod H(\mathbf{C})$, donc que v est l'image de l'élément $k_1 \in G(\mathbf{R})$, ce qui prouve b).

Enfin, si H est distingué, il est clair que l'image de K_1 dans $(G/H)\,(\mathbf{R})$ est dense pour la topologie de Zariski de G/H; or cette image est un compact, d'où etc.

[Le rédacteur ne voit pas comment démontrer que H est anisotrope sans utiliser les décompositions de Cartan — sauf, bien sûr, dans le cas où H est connexe, qui est trivial.]