Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

Autor: Serre, Jean-Pierre

Kapitel: 2.4. Correspondance entre sous-cogèbres et sous-catégories de Com_C^f.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

b) Com_C^f *est semi-simple, et tout objet simple de* Com_C^f *est absolument simple.*

C'est trivial à partir du résultat analogue pour les algèbres.

[Noter que ce résultat s'applique notamment à la bigèbre d'un groupe réductif déployé sur K, lorsque $\mathrm{car}(K) = 0$. Mais, bien entendu, il ne donne que la structure de *cogèbre* de la bigèbre en question, pas sa structure d'algèbre.]

d) A tout $E \in \mathrm{Com}_C^f$ on peut associer un élément *trace* $\theta_E \in C$ de la manière suivante: E définit un morphisme de cogèbres

$$\mathrm{End}(E) \to C \quad \text{(cf. n° 1.2)}$$

et l'on prend l'image de 1_E dans C par ce morphisme. En termes d'une base (v_i) de E, et des $c_{ij} \in C$ correspondants *(loc. cit.),* on a $\theta_E = \sum_i c_{ii}$.

[Voici encore une autre définition: si l'on regarde E comme module sur l'algèbre C'_E duale de C_E, on a $C'_E \subset \mathrm{End}(E)$, et la forme $u \mapsto \mathrm{Tr}(u)$, étant une forme linéaire sur C'_E, s'identifie à un élément de C_E qui n'est autre que θ_E.]

PROPOSITION 4. *Supposons K de caractéristique* 0. *Soient E_1 et E_2 deux comodules de rang fini, et soient $\theta_1, \theta_2 \in C$ les traces correspondantes. On a $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si les quotients de Jordan-Hölder de E_1 et E_2 coïncident* (avec leurs mutiplicités).

En effet, le résultat dual (pour les modules de rang fini sur une algèbre) est bien connu (*Alg.* VIII).

COROLLAIRE. *Si E_1 et E_2 sont semi-simples, on a $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si E_1 et E_2 sont isomorphes.*

Remarques

1) On peut aussi donner des résultats lorsque $\mathrm{car}(K) \neq 0$. Par exemple, si les E_α sont des comodules absolument simples deux à deux non isomorphes, les θ_α correspondants sont linéairement indépendants sur K.

2) Les résultats précédents s'appliquent notamment aux *représentations linéaires* d'un schéma en groupes (ou en monoïdes) affine sur K.

2.4. CORRESPONDANCE ENTRE SOUS-COGÈBRES ET SOUS-CATÉGORIES DE Com_C^f.

Si D est une sous-cogèbre de C, on a déjà remarqué que tout D-comodule peut être considéré comme un C-comodule. On obtient ainsi un isomorphisme de Com_D^f sur une sous-catégorie abélienne $\tilde{D}$ de Com_C^f.

THÉORÈME 2. *L'application* $D \mapsto \tilde{D}$ *est une bijection de l'ensemble des sous-cogèbres de* C *sur l'ensemble des sous-catégories* L *de* Com_C^f *vérifiant les conditions suivantes:*

1) L *est pleine* (i.e. si $E, F \in L$, on a $\mathrm{Hom}^L(E, F) = \mathrm{Hom}^C(E, F)$),

2) L *est stable par sommes directes finies,*

3) *Tout objet de* Com_C^f *qui est isomorphe à un sous-objet, ou à un objet quotient, d'un objet de* L, *appartient à* L.

[On se permet d'écrire $E \in L$ à la place de $E \in \mathrm{ob}(L)$.]

Soit Θ l'ensemble des L vérifiant les conditions 1), 2), 3). Si $L \in \Theta$, il est clair que L est une catégorie abélienne ayant même sous-objets et mêmes objets quotients que Com_C^f. On notera $C(L)$ la sous-cogèbre de C somme des cogèbres C_E, pour $E \in L$. Le théorème va résulter des deux formules suivantes:

a) $C(\tilde{D}) = D$ pour toute sous-cogèbre D de C;

b) $C(L)\tilde{} = L$ pour toute $L \in \Theta$.

La première de ces deux formules est triviale: elle revient à dire que D est réunion des sous-cogèbres C_E, lorsque E parcourt l'ensemble (!) des D-comodules de rang fini, ce qui a été prouvé au n° 2.1. Pour la seconde, il suffit de prouver ceci:

LEMME 1. *Soit* E *un comodule de rang fini, soit* $C_E \subset C$ *la cogèbre correspondante, et soit* F *un* C_E*-comodule* (considéré comme C-comodule) *de rang fini. Il existe alors un entier* $n \geqslant 0$ *tel que* F *soit isomorphe à un sous-comodule d'un quotient de* E^n.

Par dualité, cela revient à dire que, si B est une algèbre de rang fini, et E un B-module fidèle, tout B-module de type fini F est isomorphe à un quotient d'un sous-module d'un E^n. Or F est isomorphe à un quotient d'un module libre B^q, et l'on est ramené à prouver que B^q est isomorphe à un sous-module d'un E^n; il suffit d'ailleurs de le faire pour $q = 1$. Mais c'est clair: si E est engendré par $x_1, \ldots, x_n$, l'application $b \mapsto (bx_1, \ldots, bx_n)$ est une injection de B dans E^n, puisque E est fidèle. D'où le lemme, et, avec lui, le théorème.

Remarques

1) Le lecteur peut à volonté interpréter Com_C^f comme une *petite* catégorie (relative à un univers fixé, par exemple), ou une *grosse*. Le th. 2 est correct dans l'une ou l'autre interprétation.

2) Il n'est pas indispensable de passer aux modules pour prouver le lemme 1. On remarque d'abord (cf. n° 1.4, Exemple 2) que F est isomorphe à un sous-comodule de $C_E \otimes F$, i.e. de $(C_E)^n$, avec $n = \operatorname{rang}(F)$. D'autre part, C_E est isomorphe, comme comodule, à un quotient de $E \otimes E'$, c'est-à-dire de E^m, où $m = \operatorname{rang}(E)$. D'où le résultat.

Exemples

1) La sous-catégorie de Com_C^f formée des *objets semi-simples* correspond à la *plus grande sous-cogèbre semi-simple* de C (la somme de toutes les sous-cogèbres simples).

2) Supposons C semi-simple, et soit $(E_i)_{i \in I}$ un ensemble de représentants des classes de C-comodules simples. Posons $C_i = C_{E_i}$, de sorte que C est somme directe des cogèbres simples C_i. Si J est une partie de I, $C_J = \sum_{i \in J} C_i$ est une sous-cogèbre de C, et toute sous-cogèbre de C s'obtient de cette manière, et de façon unique. La sous-catégorie correspondant à C_J est formée des comodules isomorphes à des sommes directes finies des E_i, $i \in J$.

2.5. Où l'on caractérise Com_C^f

Soit M une catégorie abélienne munie des deux structures suivantes:

a) M est une catégorie *sur* K; cela signifie que, si E, F sont des objets de M, $\mathrm{Hom}^M(E, F)$ est muni d'une structure de K-espace vectoriel, la composition des morphismes étant bilinéaire.

b) On se donne un foncteur $v: M \to \mathrm{Vect}_K^f$ de M dans la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

On fait les *hypothèses* suivantes:

(i) Le foncteur v est *K-linéaire,* i.e. pour tout $E, F \in M$, l'application $v: \mathrm{Hom}^M(E, F) \to \mathrm{Hom}(v(E), v(F))$ est K-linéaire.

(ii) Le foncteur v est *exact* et *fidèle.*

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une cogèbre C sur K* (et une seule, à isomorphisme près) *telle que M soit équivalente à* Com_C^f, *cette équivalence transformant le foncteur v en le foncteur C-module $\mapsto$ espace vectoriel sous-jacent.*

[Ici, il est nécessaire d'interpréter M comme une petite catégorie, ou en tout cas de supposer qu'il existe un ensemble de représentants pour les classes d'isomorphisme d'objets de M.]