Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: 2.3. Traductions
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

COROLLAIRE. *La catégorie* Com_C^f *est isomorphe à la catégorie* $\mathrm{Mod}_{A^o}^f$.

Remarque. Soit $E \in \mathrm{Com}_C^f$; munissons E' (resp. E) de la structure correspondante de A-module à gauche (resp. à droite). Si $x \in E$, $x' \in E'$ et $a, b \in A$, on a alors les formules:

(1) $$< d_E(x),\ a \otimes x' > \ = \ < x, ax' > \ = \ < xa, x' >$$

et

(2) $$< d_E^{(2)}(x),\ a \otimes b \otimes x' > \ = \ < x, abx' > \ = \ < xab, x' > ,$$

avec

$$d_E^{(2)} = (d \otimes 1_E) \circ d_E = (1_C \otimes d_E) \circ d_E .$$

2.3. TRADUCTIONS

Tout résultat sur les modules donne, grâce à la prop. 2 et à son corollaire, un résultat correspondant sur les comodules. Voici quelques exemples:

a) Si $E \in \mathrm{Com}_C^f$, la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1) est la duale de la sous-algèbre de $\mathrm{End}(E)$ définie par la structure de module de E.

b) Le fait que C soit un C-comodule injectif (cf. n° 1.4) est la traduction du fait que A est un A-module projectif (puisque libre de rang 1!).

c) Une cogèbre est dite *simple* si elle est $\neq 0$ et n'admet pas d'autre sous-cogèbre que 0 et elle-même; c'est alors le dual d'une algèbre simple de rang fini. Elle est dite *semi-simple* si elle est somme de sous-cogèbres simples, et on vérifie alors que l'on peut choisir cette somme de telle sorte qu'elle soit *directe.*

On a:

PROPOSITION 3. *Pour que* Com_C^f *soit une catégorie semi-simple, il faut et il suffit que* C *soit semi-simple.*

De plus, si c'est le cas, et si E_α est une famille de représentants des classes de comodules simples sur C, la cogèbre C est somme directe des cogèbres C_{E_α}, qui sont simples.

On a également:

COROLLAIRE. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) C *est somme directe de cogèbres de la forme* $\mathbf{M}_n(K)$.

b) Com_C^f *est semi-simple, et tout objet simple de* Com_C^f *est absolument simple.*

C'est trivial à partir du résultat analogue pour les algèbres.

[Noter que ce résultat s'applique notamment à la bigèbre d'un groupe réductif déployé sur K, lorsque $\mathrm{car}(K) = 0$. Mais, bien entendu, il ne donne que la structure de *cogèbre* de la bigèbre en question, pas sa structure d'algèbre.]

d) A tout $E \in \mathrm{Com}_C^f$ on peut associer un élément *trace* $\theta_E \in C$ de la manière suivante: E définit un morphisme de cogèbres

$$\mathrm{End}(E) \to C \quad \text{(cf. n° 1.2)}$$

et l'on prend l'image de 1_E dans C par ce morphisme. En termes d'une base (v_i) de E, et des $c_{ij} \in C$ correspondants *(loc. cit.),* on a $\theta_E = \sum_i c_{ii}$.

[Voici encore une autre définition: si l'on regarde E comme module sur l'algèbre C'_E duale de C_E, on a $C'_E \subset \mathrm{End}(E)$, et la forme $u \mapsto \mathrm{Tr}(u)$, étant une forme linéaire sur C'_E, s'identifie à un élément de C_E qui n'est autre que θ_E.]

PROPOSITION 4. *Supposons K de caractéristique* 0. *Soient E_1 et E_2 deux comodules de rang fini, et soient $\theta_1, \theta_2 \in C$ les traces correspondantes. On a $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si les quotients de Jordan-Hölder de E_1 et E_2 coïncident* (avec leurs mutiplicités).

En effet, le résultat dual (pour les modules de rang fini sur une algèbre) est bien connu (*Alg.* VIII).

COROLLAIRE. *Si E_1 et E_2 sont semi-simples, on a $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si E_1 et E_2 sont isomorphes.*

Remarques

1) On peut aussi donner des résultats lorsque $\mathrm{car}(K) \neq 0$. Par exemple, si les E_α sont des comodules absolument simples deux à deux non isomorphes, les θ_α correspondants sont linéairement indépendants sur K.

2) Les résultats précédents s'appliquent notamment aux *représentations linéaires* d'un schéma en groupes (ou en monoïdes) affine sur K.

2.4. CORRESPONDANCE ENTRE SOUS-COGÈBRES ET SOUS-CATÉGORIES DE Com_C^f.

Si D est une sous-cogèbre de C, on a déjà remarqué que tout D-comodule peut être considéré comme un C-comodule. On obtient ainsi un isomorphisme de Com_D^f sur une sous-catégorie abélienne $\tilde{D}$ de Com_C^f.