2.2. Dualité entre cogèbres et algèbres profinies

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2) Une sous-cogèbre de rang 1 (sur K) de C a pour base un élément non nul x tel que $d(x) = x \otimes x$; on a alors $e(x) = 1$.

3) Si D est une cogèbre, et si $f: D \to C$ est un morphisme de cogèbres, $f(D)$ est une sous-cogèbre de C.

4) Soit E un comodule sur C, soit $(v_i)_{i \in I}$ une base de E, et soient $c_{ij} \in C$ tels que $d_E(v_i) = \sum c_{ij} \otimes v_j$, cf. n° 1.2, Remarque 3. Il résulte de la formule (1′) du n° 1.2 que le *sous-espace vectoriel C_E engendré par les c_{ij} est une sous-cogèbre de C.* Cette sous-cogèbre ne dépend pas du choix de la base (v_i), car c'est l'image de l'application $E \otimes E' \to C$ associée à d_E (cf. n° 1.2, Remarque 2). On peut aussi caractériser C_E comme le plus petit sous-espace vectoriel X de C tel que $\mathrm{Im}(d_E) \subset X \otimes E$.

Noter que, si D est une sous-cogèbre de C contenant C_E, le coproduit d_E applique E dans $D \otimes E$, donc munit E d'une structure de *D-comodule*; inversement, tout D-comodule peut évidemment être considéré comme un C-comodule.

5) On peut appliquer la construction précédente en prenant pour *E un sous-comodule de C*. Dans ce cas, *la sous-cogèbre C_E contient E*. En effet, C_E est l'image de $E \otimes E' \to C$; d'autre part la restriction de e à E est un élément e_E de E' et l'on vérifie tout de suite que, si $x \in E$, l'image de $x \otimes e_E$ dans C est égale à x.

6) Supposons C de rang fini (sur K), et soit A l'algèbre duale (cf. n° 1.1, Exemple 3). Les sous-cogèbres de C correspondent bijectivement (par dualité) aux algèbres quotients de A (donc aussi aux idéaux bilatères de A).

THÉORÈME 1. *La cogèbre C est réunion filtrante croissante de ses sous-cogèbres de rang fini.*

Il suffit de prouver que tout sous-espace vectoriel W de rang fini de C est contenu dans une sous-cogèbre de rang fini. Or, d'après le corollaire à la prop. 3 du n° 1.4, il existe un sous-comodule E de C qui est de rang fini et contient W. La sous-cogèbre C_E associée à E (cf. Exemple 4) répond à la question: elle est évidemment de rang fini, et elle contient E (cf. Exemple 5), donc W. Cqfd.

2.2. DUALITÉ ENTRE COGÈBRES ET ALGÈBRES PROFINIES

DÉFINITION 2. *On appelle algèbre profinie une algèbre topologique séparée, complète, possédant une base de voisinages de* 0 *formée d'idéaux bilatères de codimension finie.*

Il revient au même de dire qu'une telle algèbre est limite projective filtrante d'algèbres de rang fini; d'où le nom de «profini».

Soit maintenant C une cogèbre, et soit $A = C'$ son dual. La structure de cogèbre de C définit sur A une structure d'algèbre (cf. *Alg.* III); d'autre part, on peut munir A de la topologie de la convergence simple sur C (K étant lui-même muni de la topologie discrète).

PROPOSITION 1. (a) *L'algèbre topologique* $A = C'$ *est une algèbre profinie. Les idéaux bilatères ouverts de* A *sont les orthogonaux des sous-cogèbres de rang fini de* C.

(b) *Inversement, toute algèbre profinie qui est associative et possède un élément unité est la duale d'une cogèbre possédant une co-unité, définie à isomorphisme unique près.*

Pour prouver (a), on remarque que $C = \varinjlim . X$, où X parcourt l'ensemble ordonné filtrant des sous-cogèbres de C de rang fini (cf. th. 1). On a alors $A = \varprojlim . X'$ et les X' sont des algèbres de rang fini. Le noyau de $A \to X'$ est l'orthogonal $\mathfrak{a}_X$ de X dans A; c'est un idéal bilatère ouvert de codimension finie. Inversement, soit $\mathfrak{a}$ un tel idéal de A, et soit X son orthogonal dans C. On a $X = (A/\mathfrak{a})'$; la structure d'algèbre de $A/\mathfrak{a}$ définit sur X une structure de cogèbre, et on en déduit que X est une sous-cogèbre de C.

L'assertion (b) est tout aussi évidente.

La correspondance «cogèbres $\Leftrightarrow$ algèbres profinies» établie ci-dessus se prolonge en une correspondance «comodules $\Leftrightarrow$ modules». De façon précise, soient

Com_C^f la catégorie des C-comodules à gauche de rang fini,

Mod_A^f la catégorie des A-modules à gauche de rang fini, dont l'annulateur est ouvert (i.e. qui sont des A-modules topologiques si on les munit de la topologie discrète).

Si $E \in \mathrm{Com}_C^f$, l'application $E \to C \otimes E$ définit par dualité une application $A \otimes E' \to E'$, et l'on voit tout de suite que cette application fait de E' un A-module à gauche topologique discret.

PROPOSITION 2. *Le foncteur* $E \mapsto E'$ *défini ci-dessus est une équivalence de la catégorie* Com_C^f *sur la catégorie opposée à* Mod_A^f.

C'est immédiat.

Noter aussi que, si F est un A-module à gauche de rang fini, F' a une structure naturelle de A^o-module à gauche. En combinant cette remarque avec la prop. 2, on obtient:

COROLLAIRE. *La catégorie* Com_C^f *est isomorphe à la catégorie* $\mathrm{Mod}_{A^o}^f$.

Remarque. Soit $E \in \mathrm{Com}_C^f$; munissons E' (resp. E) de la structure correspondante de A-module à gauche (resp. à droite). Si $x \in E$, $x' \in E'$ et $a, b \in A$, on a alors les formules:

(1) $$< d_E(x),\ a \otimes x' > \ = \ < x, ax' > \ = \ < xa, x' >$$

et

(2) $$< d_E^{(2)}(x),\ a \otimes b \otimes x' > \ = \ < x, abx' > \ = \ < xab, x' > ,$$

avec

$$d_E^{(2)} = (d \otimes 1_E) \circ d_E = (1_C \otimes d_E) \circ d_E .$$

2.3. TRADUCTIONS

Tout résultat sur les modules donne, grâce à la prop. 2 et à son corollaire, un résultat correspondant sur les comodules. Voici quelques exemples:

a) Si $E \in \mathrm{Com}_C^f$, la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1) est la duale de la sous-algèbre de $\mathrm{End}(E)$ définie par la structure de module de E.

b) Le fait que C soit un C-comodule injectif (cf. n° 1.4) est la traduction du fait que A est un A-module projectif (puisque libre de rang 1!).

c) Une cogèbre est dite *simple* si elle est $\neq 0$ et n'admet pas d'autre sous-cogèbre que 0 et elle-même; c'est alors le dual d'une algèbre simple de rang fini. Elle est dite *semi-simple* si elle est somme de sous-cogèbres simples, et on vérifie alors que l'on peut choisir cette somme de telle sorte qu'elle soit *directe.*

On a:

PROPOSITION 3. *Pour que* Com_C^f *soit une catégorie semi-simple, il faut et il suffit que* C *soit semi-simple.*

De plus, si c'est le cas, et si E_α est une famille de représentants des classes de comodules simples sur C, la cogèbre C est somme directe des cogèbres C_{E_α}, qui sont simples.

On a également:

COROLLAIRE. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) C *est somme directe de cogèbres de la forme* $\mathbf{M}_n(K)$.