Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3

Autor: Lannes, Jean

Kapitel: 4. Expression des invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 3 en termes de points de croisement

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60429

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Supposons encore $x < y$ mais ne supposons plus $e(x, y) = 0$, il résulte de ce qui précède que l'on a dans tous les cas les relations suivantes:

$$\begin{aligned}(3.2.1)\qquad &\textstyle\sum_{z \in X, z < x} (1 - e(x, y))\, e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a) \\ &= \textstyle\sum_{z \in X, z > y} (1 - e(x, y))\, e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a)\ ;\end{aligned}$$

$$(3.2.2)\qquad \textstyle\sum_{z \in X, x < z < y} (1 - e(x, y))\, e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a) = 0\ .$$

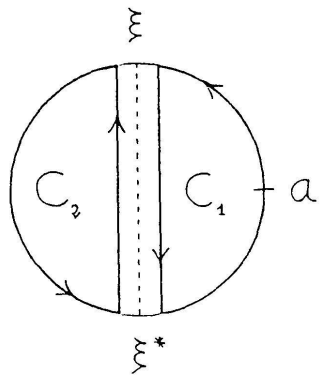


FIGURE 7

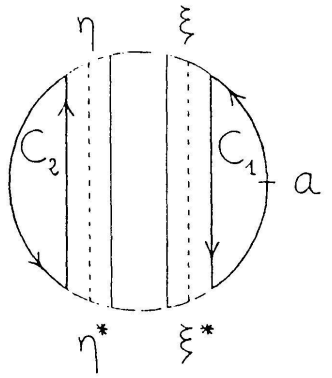


FIGURE 8

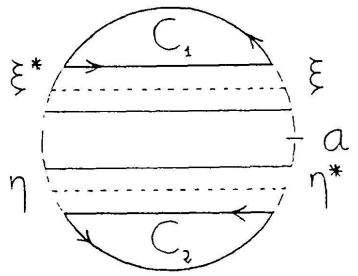


FIGURE 9

4. EXPRESSION DES INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3 EN TERMES DE POINTS DE CROISEMENT

Soient $f: \mathcal{N} \to A$ un invariant des nœuds et α une immersion générique de S^1 dans $\mathbf{R}^2$. On note encore abusivement $f: S = S(\alpha) \to A$ l'application induite par l'invariant f. On continue à utiliser les notations du paragraphe 2.

4.1. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 1

PROPOSITION 4.1. *Tout invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à* 1 *est nul. (Rappelons que nous supposons qu'un invariant est nul sur le nœud trivial.)*

Démonstration. Soient $f: \mathcal{N} \to A$ un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1 et α une immersion générique de S^1 dans $\mathbf{R}^2$. On fixe une origine a dans $S^1 - \tilde{X}$. L'application $f: S = S(\alpha) \to A$, qui est de degré inférieur ou égal à 1, est de la forme:

$$f(s) = c_\varnothing + \textstyle\sum_{x \in X} \delta_{s_a, x}(s)\, c_x$$

(notations du paragraphe 2). Le coefficient $c_\varnothing = f(s_a)$ est nul; on montre qu'il en est de même pour les coefficients c_x de la façon suivante. Soient s_1

et s_2 les sections descendantes correspondant aux composantes connexes de $S^1 - \tilde{X}$ adjacentes à un point ξ de $\tilde{X}$, on a:

— $s_2 - s_1 = \alpha(\xi)$;

— $f(s_2) - f(s_1) = \pm c_{\alpha(\xi)}$;

— $f(s_1) = 0$ et $f(s_2) = 0$.

COMMENTAIRES

On peut voir directement 4.1 comme un corollaire de 1.4 et la démonstration ci-dessus peut sembler bien compliquée. En fait le sous-paragraphe 4.1 n'est là que pour assurer la cohérence idéologique du paragraphe 4.

4.2. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 2

Soient $f: \mathscr{N} \to A$ un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 2 et α une immersion générique de S^1 dans $\mathbf{R}^2$. On considère à nouveau l'application $f: S = S(\alpha) \to A$, de degré inférieur ou égal à 2, induite par l'invariant f.

On fixe une origine a dans $S^1 - \tilde{X}$. Soit $P = \{x, y\}$ une partie à 2 éléments de X avec $x < y$ (pour la relation d'ordre sur X définie par a), on pose:

$$\lambda_{a,P}(s) = -\delta_{s_a,x}(s)\,(1 - \delta_{s_a,y}(s))\,\varepsilon_x(s_a)\,\varepsilon_y(s_a)\,. \tag{4.2.1}$$

Compte tenu de (2.1), $\lambda_{a,P}(s)$ peut être également défini par:

$$4\lambda_{a,P}(s) = (\varepsilon_x(s) - \varepsilon_x(s_a))\,(\varepsilon_y(s) + \varepsilon_y(s_a))\,. \tag{4.2.2}$$

On note enfin $\mathscr{P}_2(X)$ l'ensemble des parties à 2 éléments de X. La proposition ci-dessous généralise pour tout groupe abélien A la première formule du théorème 4 de [La] qui correspond au cas $A = \mathbf{Z}/2$:

PROPOSITION 4.2.3. *L'application $f: S \to A$ est donnée par la formule*

$$f(s) = \left(\sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\,\lambda_{a,P}(s)\right) f(T)\,.$$

Démonstration. La proposition 1.5 (a) et la proposition 2.5 donnent:

PROPOSITION 4.2.4. *Pour tout P dans $\mathscr{P}_2(X)$ et tout s dans S on a*

$$(\Delta_P f)(s) = e(P)\,\varepsilon_P(s)\,f(T)\,.$$

A partir de là, la démonstration de la proposition 4.2.3 est essentiellement la même que celle de [La]. D'après 2.3 on a

$$f(s) = f(s_a) + \sum_{z \in X} \delta_{s_a, z}(s)\,(\Delta_z f)(s_a) + \sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} \delta_{s_a, P}(s)\,(\Delta_P f)(s_a)\,,$$

ou encore, puisque $f(s_a)$ est nul et $(\Delta_P f)(s_a)$ égal à $e(P)\,\varepsilon_P(s_a)\,f(T)$,

$$f(s) = \sum_{z \in X} \delta_{s_a, z}(s)\,f(s_a + z) + \sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} \delta_{s_a, P}(s)\,e(P)\,\varepsilon_P(s_a)\,f(T)\,. \tag{4.2.5}$$

Tout se ramène donc au calcul de $f(s_a + z)$.

Soient z_- et z_+ les composantes connexes de $S^1 - \tilde{X}$ respectivement adjacentes à gauche et à droite à $\inf \alpha^{-1}(z)$. On vérifie:

$$(s_{z_-} - s_a)(r)\,e(r, z) = \begin{cases} e(r, z) & \text{si } r < z \\ 0 & \text{si } r > z\,; \end{cases} \tag{4.2.6}$$

$$s_{z_+} - s_{z_-} = z\,.$$

Avec (4.2.5) ces deux formules impliquent la suivante:

$$f(s_{z_+}) - f(s_{z_-}) = f(s_a + z) + \sum_{r \in X,\, r < z} e(r, z)\,\varepsilon_r(s_a)\,\varepsilon_z(s_a)\,f(T)\,.$$

Compte tenu de $f(s_{z_-}) = 0$ et $f(s_{z_+}) = 0$, il vient

$$f(s_a + z) = -\sum_{r \in X,\, r < z} e(r, z)\,\varepsilon_r(s_a)\,\varepsilon_z(s_a)\,f(T)\,.$$

D'où le résultat.

Voici maintenant la version «entière» du paragraphe 5 de [La].

On oublie qu'il existe des invariants de Vassiliev de degré 2 à valeurs dans $\mathbf{Z}$ et on considère *a priori* l'expression $\sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\,\lambda_{a, P}(s)$.

PROPOSITION 4.2.6. *La somme* $\sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\,\lambda_{a, P}(s)$ *est indépendante du choix de* a.

Démonstration. Soient ι le plus petit élément de $\tilde{X}$ pour la relation d'ordre induite par celle de $S^1 - \{a\}$ et b un point dans la composante connexe de $S^1 - \tilde{X}$ adjacente à droite à ι; il faut montrer:

$$\sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\,\lambda_{a, P}(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\,\lambda_{b, P}(s)\,.$$

On pose $i = \alpha(\iota)$; on a donc $\iota = s_a(i)$ et $i = \inf X$ (pour la relation d'ordre sur X définie par a). Soit P une partie à 2 éléments de X. Si $i \notin P$ alors $\lambda_{b, P}(s) = \lambda_{a, P}(s)$. Si $i \in P$ et si $e(P) = 1$ alors $\lambda_{b, P}(s) - \lambda_{a, P}(s) = \delta_{s_a, i}(s)\,\varepsilon_P(s_a)$. On a par conséquent

$$\sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\,\lambda_{b,P}(s) - \sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\,\lambda_{a,P}(s)$$
$$= \delta_{s_a,i}(s)\,\varepsilon_i(s_a) \sum_{x \in X - \{i\}} e(i,x)\,\varepsilon_x(s_a)\,.$$

Or cette dernière somme est nulle d'après (3.1).

On pose:

$$V_2(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\,\lambda_{a,P}(s)\,. \tag{4.2.7}$$

THÉORÈME 4.2.8. *L'entier* $V_2(s)$ *est un invariant de la classe d'isotopie du nœud* φ_s.

Démonstration. On vient d'assigner à tout diagramme de nœud $(\alpha; s)$ un entier $V_2(\alpha; s) = V_2(s)$. Il s'agit de vérifier que $V_2(\alpha; s)$ est invariant par les trois mouvements de Reidemeister.

L'invariance par le mouvement I (figure 10) est immédiate: un point double qui n'est enlacé avec aucun autre n'intervient pas au second membre de (4.2.7).

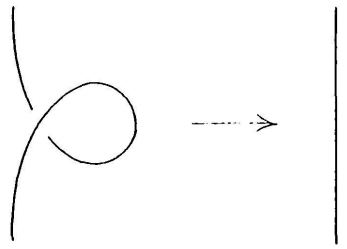


FIGURE 10

La vérification de l'invariance par les mouvements II et III (figures 11 et 12) est aisée parce que dans la formule (4.2.7) on a le choix de l'origine a.

On considère les figures 11 et 12; dans les deux cas la projection du mouvement de Reidemeister donne une isotopie régulière entre α et une immersion générique de S^1 dans $\mathbf{R}^2$ que l'on note β.

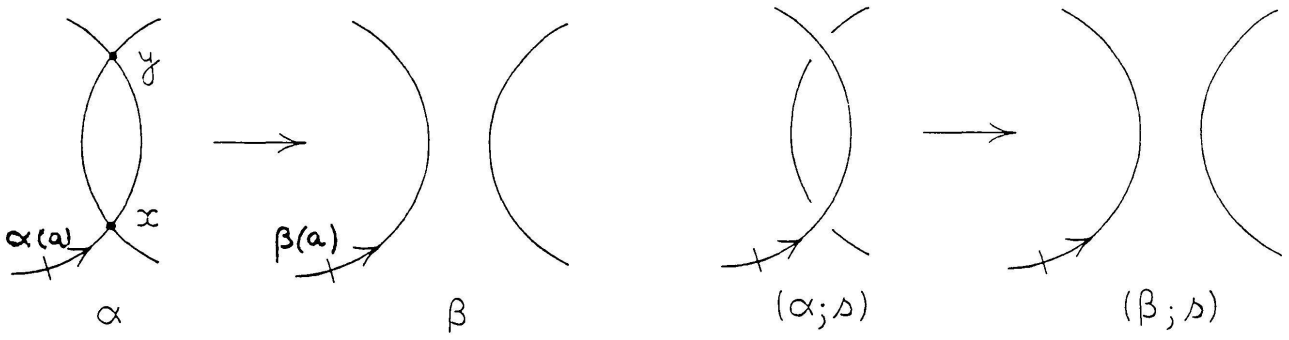


FIGURE 11

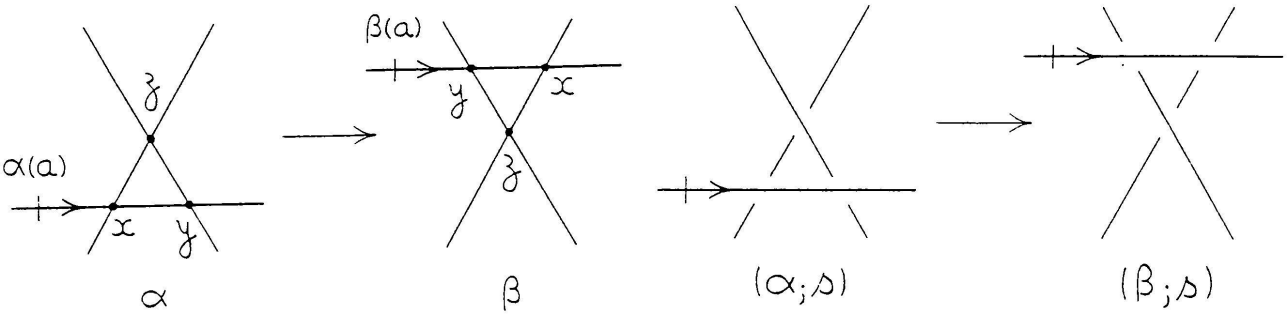


FIGURE 12

Dans le cas II les ensembles $X(\beta)$ et $\tilde{X}(\beta)$ s'identifient respectivement à $X(\alpha) - \{x, y\}$ et $\tilde{X}(\alpha) - \alpha^{-1}(\{x, y\})$; $S(\beta)$ s'identifie donc à un sous-ensemble de $S(\alpha)$.

Dans le cas III on peut identifier $\tilde{X}(\beta)$ à $\tilde{X}(\alpha)$ et $X(\beta)$ à $X(\alpha)$ «en suivant les points doubles par continuité»; $S(\beta)$ s'identifie donc à $S(\alpha)$.

Dans les deux cas l'égalité $V_2(\alpha; s) = V_2(\beta; s)$ résulte de ce que $\lambda_{a,P}(s)$ est nul si x ou y appartient à P, pour le choix indiqué de a.

On note encore $V_2 : \mathcal{N} \to \mathbf{Z}$ l'invariant des nœuds qui vient d'être défini. Il est clair qu'il s'agit d'un invariant de Vassiliev de degré 2. La proposition 4.2.3, ou plus directement les propositions 4.1 et 4.2.4 et le fait que $V_2(T)$ vaut 1, impliquent:

PROPOSITION 4.2.9. *Soit* $f : \mathcal{N} \to A$ *un invariant de Vassiliev d'ordre inférieur ou égal à* 2. *Alors:*

$$f(K) = V_2(K)\, f(T)\ .$$

COMMENTAIRES

Soit $C_K(t)$ le polynôme de Conway d'un nœud K [Co]; $C_K(t)$ est un polynôme pair à coefficients entiers:

$$C_K(t) = 1 + c_2(K)\, t^2 + c_4(K)\, t^4 + \dots\ .$$

Bar-Natan a montré (voir par exemple [Ba]) que le coefficient c_{2n} est un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à $2n$. La proposition 4.2.9 montre que les invariants c_2 et V_2 coïncident $(C_T(t) = 1 + t^2)$.

La théorie que nous avons faite de l'invariant V_2 est à comparer à celle du chapitre III de [Ka].

VARIANTES DE L'EXPRESSION DE V_2

Si dans la démonstration de 4.2.3 on remplace $\inf \alpha^{-1}(z)$ par $\sup \alpha^{-1}(z)$ on obtient:

$$f(s) = \left(\sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\, \lambda^*_{a,P}(s)\right) f(T)$$

avec $\lambda^*_{a,P}(s) = -\left(1 - \delta_{s_a,x}(s)\right) \delta_{a,y}(s)\, \varepsilon_x(s_a)\, \varepsilon_y(s_a)$, c'est-à-dire $\lambda^*_{a,P}(s) = \lambda_{a,P}(s^*)$. On a donc aussi

$$V_2(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\, \lambda^*_{a,P}(s)\,. \tag{4.2.10}$$

L'égalité

$$\sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\, \lambda_{a,P}(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\, \lambda^*_{a,P}(s)$$

est en fait équivalente à (3.1). On a en effet

$$\sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\left(\lambda_{a,P}(s) - \lambda^*_{a,P}(s)\right) = \sum_{x \in X} \delta_{s_a,x}(s)\, c_x$$

avec

$$c_x = \varepsilon_x(s_a)\left(\sum_{y \in X,\, y < x} e(x,y)\, \varepsilon_y(s_a) - \sum_{y \in X,\, y > x} e(x,y)\, \varepsilon_y(s_a)\right).$$

Le fait que V_2 puisse s'exprimer à la fois par les formules (4.2.7) et (4.2.10) a une explication plus conceptuelle. Cela traduit deux propriétés de cet invariant:

— $V_2(K^*) = V_2(K)$ (nous dirons que l'invariant V_2 est pair);

— $V_2(\bar{K}) = V_2(K)$, $\bar{K}$ désignant le nœud obtenu à partir de K par composition à la source avec un difféomorphisme de S^1 renversant l'orientation.

Ces égalités sont conséquence de la théorie du paragraphe 1: les invariants $K \mapsto V_2(K) - V_2(K^*)$ et $K \mapsto V_2(K) - V_2(\bar{K})$ sont triviaux parce que ce sont des invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1.

Compte tenu de (2.1) ou (4.2.2), on a

$$2\left(\lambda_{a,P}(s) + \lambda^*_{a,P}(s)\right) = \varepsilon_P(s) - \varepsilon_P(s_a)\,,$$

si bien que l'invariant V_2 est encore donné par

$$4\, V_2(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\left(\varepsilon_P(s) - \varepsilon_P(s_a)\right), \tag{4.2.11}$$

ce qui en posant $E(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_2(X)} e(P)\, \varepsilon_P(s)$ s'écrit

$$4\, V_2(s) = E(s) - E(s_a)\,. \tag{4.2.12}$$

Expliquons pourquoi une telle expression était prévisible. Considérons l'application $f: S \to \mathbf{Z}$ induite par un invariant de Vassiliev de degré 2, à

valeurs dans $\mathbf{Z}$, dont la fonction de poids est W_2 (voir proposition 1.5 (a)). D'après ce que nous avons dit au paragraphe 2 il existe des entiers c_x, x parcourant X, et $c_\varnothing$ tels que l'on a

$$4f(s) = E(s) + \sum_{x \in X} c_x \varepsilon_x(s) + c_\varnothing .$$

Comme nous avons vu ci-dessus que f doit être paire $(f(s) = f(s^*))$ les c_x sont nuls; comme $f(s_a)$ doit être nul $c_\varnothing$ vaut $-E(s_a)$.

Voici pour terminer une application amusante de (4.2.11):

PROPOSITION 4.2.13. *Soit* α *une immersion générique de* S^1 *dans* $\mathbf{R}^2$. *Soit* ω *le point de* $S(\alpha)$ *défini par* $\varepsilon_x(\omega) = 1$ *pour tout* x *dans* $X(\alpha)$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) α *possède deux points doubles enlacés;*

(ii) $V_2(\varphi_\omega) > 0$;

(iii) *il existe un nœud au-dessus de* α *qui est non trivial.*

Démonstration de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour tout P dans $\mathscr{P}_2(X)$ et tout a dans $S^1 - \tilde{X}$ le terme $\varepsilon_P(\omega) - \varepsilon_P(s_a)$ qui apparaît dans l'expression (4.2.11) de $V_2(\varphi_\omega)$ vaut 0 ou 2. Il faut donc montrer que (i) implique en fait qu'il existe P et a avec $e(P) = 1$ et $\varepsilon_P(s_a) = -1$. Soient x et y deux points doubles enlacés de α. Choisissons a dans $S^1 - \tilde{X}$ de façon à ce que x soit le plus petit des points doubles pour l'ordre induit sur X; la relation (3.1) devient $\sum_{z \in X - \{x\}} e(x, z)\, \varepsilon_z(s_a) = 0$. Il existe donc y' dans $X - \{x\}$ avec $e(x, y') = 1$ et $\varepsilon_y(s_a) + \varepsilon_{y'}(s_a) = 0$. Ou $\varepsilon_x(s_a)\, \varepsilon_y(s_a)$ ou $\varepsilon_x(s_a)\, \varepsilon_{y'}(s_a)$ est égal à -1.

Démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i). Si $e(P) = 0$ pour tout P dans $\mathscr{P}_2(X)$ alors tout diagramme de nœud au-dessus de α peut être ramené au diagramme trivial par une succession de mouvements de Reidemeister de type I.

4.3. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3

HEURISTIQUE

Soit $f: \mathscr{N} \to \mathbf{Z}$ un invariant de Vassiliev de degré 3 dont la fonction de poids est W_3 (voir proposition 1.5 (b)). Comme l'invariant $K \mapsto f(K) + f(K^*)$ est de degré inférieur ou égal à 2, on a d'après 4.2.9

$$f(K) + f(K^*) = (f(T) + f(T^*))\, V_2(K) ,$$

ou encore

$$f(K) + f(K^*) = -2f(H)V_2(K)$$

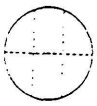
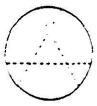
(l'égalité $f(K_4) = f(T) + f(T^*) + 2f(H)$ du paragraphe 1 montre que l'on a $f(T) + f(T^*) = -2f(H)$ pour f de degré inférieur ou égal à 3); il en résulte que l'invariant $f + f(H)V_2$ est impair (change de signe quand on remplace K par K^*). On peut donc supposer sans perdre de généralité que f est impair ce que nous ferons ci-dessous.

Soit α une immersion générique de S^1 dans $\mathbf{R}^2$. On considère toujours l'application $f: S = S(\alpha) \to \mathbf{Z}$ induite par l'invariant f; elle est de degré inférieur ou égal à 3 et impaire $(f(s^*) = -f(s))$.

Soit $P = \{x, y, z\}$ une partie à 3 éléments de X. On pose $w(P) = \sup(N-1, 0)$, N désignant le nombre de paires, contenues dans P, de points enlacés. En d'autres termes on pose:

$$w(P) = e(x,y)\,e(x,z) + e(y,x)\,e(y,z) + e(z,x)\,e(z,y) - e(x,y)\,e(x,z)\,e(y,z)\ ;$$

$w(\{x, y, z\})$ sera également noté $w(x, y, z)$. Dans le langage de [Ba], $\alpha^{-1}(P)$ est un diagramme à 3 cordes; on a avec le symbolisme de cet article:

w() = 1 , w() = 2

et w est nul sur les trois autres éléments de $\mathscr{D}_3$.

On pose enfin

$$W(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_3(X)} w(P)\,\varepsilon_P(s)\ ,$$

$\mathscr{P}_3(X)$ désignant le nombre de parties à 3 éléments de X.

Comme précédemment $8f$ s'écrit

$$8f(s) = W(s) + \sum_{Q \in \mathscr{P}_2(X)} c_Q\,\varepsilon_Q(s) + \sum_{x \in X} c_x\,\varepsilon_x(s) + c_\varnothing\ ,$$

et puisque f est impaire les coefficients c_Q et $c_\varnothing$ sont nuls:

$$8f(s) = W(s) + \sum_{x \in X} c_x\,\varepsilon_x(s)\ .$$

On détermine les coefficients c_x de la façon suivante. On fixe une origine a dans $S^1 - \tilde{X}$. On considère comme au paragraphe précédent les composantes connexes x_- et x_+ de $S^1 - \tilde{X}$ respectivement adjacentes à gauche et à droite à $\inf \alpha^{-1}(x)$. Compte tenu de $f(s_{x_-}) = 0$ et $f(s_{x_+}) = 0$, il vient

$$c_x = (W(s_{x_+}) - W(s_{x_-}))/2\varepsilon_x(s_{x_-})\ ; \tag{4.3.1}$$

il est clair que ce quotient est entier.

Remarque. Posons $s_- = s_{x_-}, s_+ = s_{x_+}$ et introduisons également les sections descendantes s'_+ et s'_- correspondant aux composantes connexes de $S^1 - \tilde{X}$ respectivement adjacentes à gauche et à droite à $\sup \alpha^{-1}(x)$. On obtient pareillement

$$c_x = (W(s'_+) - W(s'_-))/2\varepsilon_x(s'_-) = -(W(s'_+) - W(s'_-))/2\varepsilon_x(s_-) .$$

On doit donc avoir

$$W(s_+) - W(s_-) + W(s'_+) - W(s'_-) = 0 .$$

En fait cette relation est conséquence de (3.2.1) et (3.2.2).

L'explicitation de (4.3.1) donne

$$8f(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_3(X)} w(P)\, \mu_{a,P}(s) \tag{4.3.2}$$

en posant

$$\begin{aligned}\mu_{a,\{x,y,z\}}(s) = {} & \varepsilon_x(s)\,\varepsilon_y(s)\,\varepsilon_z(s) - \varepsilon_x(s)\,\varepsilon_y(s_{x_-})\,\varepsilon_z(s_{x_-}) \\ & - \varepsilon_x(s_{y_-})\,\varepsilon_y(s)\,\varepsilon_z(s_{y_-}) - \varepsilon_x(s_{z_-})\,\varepsilon_y(s_{z_-})\,\varepsilon_z(s) .\end{aligned}$$

A l'aide de (4.2.6) et des relations d'intersection du paragraphe 3 l'expression (4.3.2) se transforme en

$$8f(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_3(X)} w(P)\, \nu_{a,P}(s) , \tag{4.3.3}$$

le terme $\nu_{a,P}(s)$ étant défini de la façon suivante. On écrit $P = \{x, y, z\}$ avec $x < y < z$ (toujours pour la relation d'ordre sur X définie par a) et on pose

$$\begin{aligned}\nu_{a,P}(s) = {} & \varepsilon_x(s)\,\varepsilon_y(s)\,\varepsilon_z(s) - \varepsilon_x(s)\,\varepsilon_y(s_a)\,\varepsilon_z(s_a) \\ & + \varepsilon_x(s_a)\,\varepsilon_y(s)\,\varepsilon_z(s_a) - \varepsilon_x(s_a)\,\varepsilon_y(s_a)\,\varepsilon_z(s) .\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

On a encore:

$$\begin{aligned}\nu_{a,P}(s) = 4\big(& \varepsilon_x(s)\,\lambda_{a,\{y,z\}}(s) - \varepsilon_y(s)\,\lambda_{a,\{x,z\}}(s) \\ & + \varepsilon_z(s)\,\lambda_{a,\{x,y\}}(s)\big) .\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Théorie «ab initio» de l'invariant V_3

On oublie maintenant l'heuristique précédente (voilà pourquoi nous n'avons pas détaillé le passage de (4.3.2) à (4.3.3)) et on considère *a priori* le second membre de (4.3.3).

Proposition 4.3.6. *La somme* $\sum_{P \in \mathscr{P}_3(X)} w(P)\, \nu_{a,P}(s)$ *est indépendante du choix de* a.

Démonstration. On reprend les notations de la démonstration de la proposition 4.2.6. Il faut montrer:

$$\sum_{P \in \mathscr{P}_3(X)} w(P)\, \nu_{a,P}(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_3(X)} w(P)\, \nu_{b,P}(s) .$$

Soit P une partie à 3 éléments de X. Si i n'appartient pas à P alors $\nu_{a,P}(s)$ et $\nu_{b,P}(s)$ coïncident. On suppose maintenant que i appartient à P. On suppose tout d'abord que $w(P)$ est non nul. On écrit $P = \{i, x, j\}$ avec $i < x < j$ pour l'ordre sur X défini par a. Pour l'ordre défini par b, on a: $x < j < i$ ou $x < i < j$, suivant que i et j sont enlacés ou non. Dans le premier cas $\nu_{a,P}(s)$ et $\nu_{b,P}(s)$ coïncident à nouveau; dans le second on a

$$\nu_{b,P}(s) - \nu_{a,P}(s) = 2(\varepsilon_i(s)\, \varepsilon_j(s_a) + \varepsilon_i(s_a)\, \varepsilon_j(s))\, \varepsilon_x(s_a) .$$

Il en résulte dans les deux cas:

$$\begin{aligned} & w(P)\,(\nu_{b,P}(s) - \nu_{a,P}(s)) \\ &= 2(\varepsilon_i(s)\, \varepsilon_j(s_a) + \varepsilon_i(s_a)\, \varepsilon_j(s))\, (1 - e(i,j))\, e(i,x)\, e(j,x)\, \varepsilon_x(s_a) . \end{aligned}$$

On observe ensuite que cette relation est encore vérifiée si $w(P)$ est nul. On conclut alors à l'aide de la relation d'intersection (3.2.2).

On pose (provisoirement, la notation définitive sera canonisée après 4.3.8):

$$g(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_3(X)} w(P)\, \nu_{a,P}(s) .$$

THÉORÈME 4.3.7. *L'entier* $g(s)$ *est un invariant de la classe d'isotopie du nœud* φ_s.

Démonstration. On reprend les notations de la démonstration du théorème 4.2 8. La raison de l'invariance par le mouvement I est identique. Pour vérifier l'invariance par les mouvements II et III on choisit l'origine a de la même façon et on utilise l'expression (4.3.5) du terme $\nu_{a,P}(s)$.

Invariance par le mouvement II (figure 11).

On a

$$\begin{aligned} & g(\alpha; s) - g(\beta; s) \\ &= 4 \sum_{Q \in \mathscr{P}_2(X - \{x,y\})} (w(\{x\} \cup Q)\, \varepsilon_x(s_a) + w(\{y\} \cup Q)\, \varepsilon_y(s_a))\, \lambda_{a,Q}(s) . \end{aligned}$$

et l'on conclut en observant que l'on a:

— $w(\{x\} \cup Q) = w(\{y\} \cup Q)$;

— $\varepsilon_x(s_a) + \varepsilon_y(s_a) = 0$.

Invariance par le mouvement III (figure 12).

En accord avec les identifications dont nous avons convenues, nous posons $X = X(\alpha) = X(\beta)$. Les applications de $X(\alpha) \times S(\alpha)$ et $X(\beta) \times S(\beta)$ dans $\{\pm 1\}$, $(x, s) \mapsto \varepsilon_x(s)$, sont identifiées. Par contre les applications

$$e\colon \mathscr{P}_2(X(\alpha)) \to \{0,1\} \quad \text{et} \quad e\colon \mathscr{P}_2(X(\beta)) \to \{0,1\}\,,$$
$$w\colon \mathscr{P}_3(X(\alpha)) \to \{0,1,2\} \quad \text{et} \quad w\colon \mathscr{P}_3(X(\beta)) \to \{0,1,2\}$$

différent; nous les notons ci-dessous e_α et e_β, w_α et w_β.

On a par inspection:

$$g(\beta;s) - g(\alpha;s) = \sum_{r \in X - \{x,y,z\}}$$
$$((w_\beta(x,z,r) - w_\alpha(x,z,r))\,\varepsilon_x(s_a) + (w_\beta(y,z,r) - w_\alpha(y,z,r))\,\varepsilon_y(s_a))$$
$$\lambda_{a,\{z,r\}}(s)\,.$$

Il suffit donc de montrer que l'on a

$$(w_\beta(x,z,r) - w_\alpha(x,z,r))\,\varepsilon_x(s_a)$$
$$+ (w_\beta(y,z,r) - w_\alpha(y,z,r))\,\varepsilon_y(s_a) = 0$$

pour tout r dans $X - \{x,y,z\}$.

Pour cela on écrit

$$w(-,z,r) = e(-,r)\,e(z,r) + e(z,r)\,e(z,-) + (1 - e(z,r))\,e(z,-)\,e(r,-)$$

et l'on fait les observations suivantes:

— Les enlacements $e_\alpha(-,r)$ *et* $e_\beta(-,r)$ coïncident.

— En considérant la relation d'intersection (3.1) à la fois pour α et β, on obtient

$$e_\alpha(z,x)\,\varepsilon_x(s_a) + e_\alpha(z,y)\,\varepsilon_y(s_a) = e_\beta(z,x)\,\varepsilon_x(s_a) + e_\beta(z,y)\,\varepsilon_y(s_a)\,.$$

— De même en considérant la relation d'intersection (3.2.1) à la fois pour α et β, on obtient

$$(1 - e_\alpha(z,r))\,e_\alpha(z,x)\,e_\alpha(r,x)\,\varepsilon_x(s_a) + (1 - e_\alpha(z,r))\,e_\alpha(z,y)\,e_\alpha(r,y)\,\varepsilon_y(s_a)$$
$$= (1 - e_\beta(z,r))\,e_\beta(z,x)\,e_\beta(r,x)\,\varepsilon_x(s_a) + (1 - e_\beta(z,r))\,e_\beta(z,y)\,e_\alpha(r,y)\,\varepsilon_y(s_a)\,.$$

Remarque (suscitée par une discussion avec G. Masbaum). Considérons pour $k = 1$ et 2 les sommes:

$$\sum_{P \in \mathscr{P}_3(X),\, w(P) = k} \mu_{a,P}(s)\,.$$

La démonstration de 4.3.6 montre en fait que ces sommes sont indépendantes de a si bien que l'on peut poser:

$$g_{(k)}(\alpha;s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_3(X),\, w(P) = k} \mu_{a,P}(s)$$

et écrire $g(\alpha;s) = g_{(1)}(\alpha;s) + 2g_{(2)}(\alpha;s)$.

La démonstration ci-dessus montre que $g_{(1)}(\alpha; s)$ et $g_{(2)}(\alpha; s)$ sont invariantes par les mouvements de Reidemeister I et II; par contre elles ne sont pas en général invariantes par III.

D'après (4.3.5) l'entier $g(s)$ est divisible par 4. En fait:

LEMME 4.3.8. *L'entier* $g(s)$ *est divisible par* 8.

Démonstration. Puisque g est nulle sur les sections descendantes il suffit de montrer que la valeur de g modulo 8 est constante.

Soient s un élément de S et x un élément de X; on choisit a de telle sorte que x soit le plus petit élément de X pour l'ordre défini par a. On a:

$$\varepsilon_x(s)\,(g(s) - g(s+x)) = 2 \sum_{Q \in \mathscr{P}_2(X - \{x\})} w(\{x\} \cup Q)\,(\varepsilon_Q(s) - \varepsilon_Q(s_a)) .$$

Il faut donc vérifier que la somme au second membre, disons $G_x(s)$, est divisible par 4. On pose $Q = \{y, z\}$ avec $y < z$; grâce à la congruence:

$$\varepsilon_y(s)\,\varepsilon_z(s) - \varepsilon_y(s_a)\,\varepsilon_z(s_a) \equiv \varepsilon_y(s)\,\varepsilon_z(s_a) - \varepsilon_y(s_a)\,\varepsilon_z(s) \quad \text{mod. } 4 ,$$

il vient: $G_x(s) \equiv H_x(s)$ mod. 4, en posant:

$$H_x(s) = \sum_{(y,z) \in (X - \{x\})^2,\, y < z} w(x, y, z)\,(\varepsilon_y(s)\,\varepsilon_z(s_a) - \varepsilon_y(s_a)\,\varepsilon_z(s)) .$$

Cette somme s'écrit $\sum_{y \in X - \{x\}} \varepsilon_y(s)\, c_{x,y}$ en posant:

$$c_{x,y} = \sum_{z \in X - \{x,y\},\, z > y} w(x, y, z)\,\varepsilon_z(s_a) - \sum_{z \in X - \{x,y\},\, z < y} w(x, y, z)\,\varepsilon_z(s_a) .$$

Comme $H_x(s_a)$ est nul, $H_x(s)$ s'écrit aussi $\sum_{y \in X - \{x\}} (\varepsilon_y(s) - \varepsilon_y(s_a))\, c_{x,y}$ et il suffit finalement de montrer que $c_{x,y}$ est pair, c'est-à-dire:

$$\sum_{z \in X - \{x,y\}} w(x, y, z) \equiv 0 \quad \text{mod. } 2 .$$

Cette congruence résulte encore des relations d'intersections du paragraphe 3 (écrire $w(x, y, z) = (1 - e(x, y))\, e(x, z)\, e(y, z) + e(x, y)\, e(y, z) + e(x, y)\, e(x, z)$).

On note enfin V_3 l'application de S dans $\mathbf{Z}$ définie par la formule:

$$8\, V_3(s) = \sum_{P \in \mathscr{P}_3(X)} w(P)\, \nu_{a,P}(s) . \tag{4.3.9}$$

Comme au paragraphe 4, on note encore $V_3 : \mathscr{N} \to \mathbf{Z}$ l'invariant des nœuds associé. Il est clair qu'il s'agit d'un invariant de Vassiliev de degré 3.

PROPOSITION 4.3.10. *Soit* $f : \mathscr{N} \to A$ *un invariant de Vassiliev d'ordre inférieur ou égal à* 3. *Alors:*

$$f(K) = V_3(K)\,(f(T) + f(H)) - V_2(K)\, f(H) .$$

Si la multiplication par 2 *est injective dans* A, *cette formule peut encore s'écrire:*

$$f(K) = V_3(K)\left((f(T) - f(T^*))/2\right) + V_2(K)\left((f(T) + f(T^*))/2\right)$$

(les éléments de A, $f(T) - f(T^*)$ *et* $f(T) + f(T^*)$, *sont uniquement divisibles par* 2*).*

Démonstration. La proposition 1.5 (b) et la proposition 2.5 donnent:

PROPOSITION 4.3.11. *Soit* P *une partie à trois éléments de* X. *On a:*

$$(\Delta_P f)(s) = w(P)\,\varepsilon_P(s)\left(f(T) + f(H)\right).$$

Il en résulte que l'invariant $K \mapsto f(K) - V_3(K)\left(f(T) + f(H)\right)$ est de degré inférieur ou égal à 2. On applique alors 4.2.9. Pour conclure il suffit de savoir que $V_3(T)$ vaut 1 ce qu'on vérifie par exemple avec le diagramme de la figure 1 (la somme au second membre de (4.3.9) ne contient dans ce cas qu'un terme).

COMMENTAIRES

Soit $J_K(t)$ le polynôme de Jones d'un nœud K [Jo] (rappelons que $J_K(t)$ appartient à $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$); on considère dans $\mathbf{Q}[[u]]$ la série formelle:

$$J_K(e^u) = 1 + j_1(K)u + j_2(K)u^2 + j_3(K)u^3 + \dots .$$

Birman et Lin, et Bar-Natan, ont montré que le coefficient j_n est un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à n [BL] [Ba]; l'égalité $J_{K^*}(t) = J_K(t^{-1})$ se traduit par le fait que j_n est pair si n est pair et impair si n est impair. La proposition 4.3.10 donne (rappelons que l'on a $J_T(t) = t + t^3 - t^4$)

$$J_K(e^u) \equiv 1 - 3V_2(K)u^2 - 6V_3(K)u^3 \quad \text{mod. } u^4,$$

ou encore

$$J_K(t) \equiv 1 - 3V_2(K)(t-1)^2 + 3\left(V_2(K) - 2V_3(K)\right)(t-1)^3 \quad \text{mod. } (t-1)^4,$$

ou enfin

$$J_K^{(2)}(1) = -6V_2(K)\,; \qquad J_K^{(3)}(1) = 18\left(V_2(K) - 2V_3(K)\right).$$