4. Extensions abéliennes d'algèbres de Leibniz et représentations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. Dérivations et bidérivations

3.1. *Définitions.* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz. Une *dérivation* $d: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une application k-linéaire qui vérifie

$$d([x, y]) = [dx, y] + [x, dy], \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathfrak{g} .$$

Une *anti-dérivation* $D: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une application k-linéaire qui vérifie

$$D([x, y]) = [Dx, y] - [Dy, x] \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathfrak{g} .$$

Notons que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie il n'y a pas de différence entre dérivation et anti-dérivation.

Par définition, une *bidérivation* de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'une dérivation d et d'une anti-dérivation D qui vérifient en outre

$$[x, dy] = [x, Dy], \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathfrak{g} . \tag{3.1.1}$$

3.2. *Bidérivation intérieure.* Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ l'application $\mathrm{ad}(x)$ définie par $\mathrm{ad}(x)(y) = -[y, x]$ est une dérivation et l'application $\mathrm{Ad}(x)$ définie par $\mathrm{Ad}(x)(y) = [x, y]$ est une anti-dérivation. De plus, $(\mathrm{ad}(x), \mathrm{Ad}(x))$ est une bidérivation (*cf.* 1.1) appelée la *bidérivation intérieure* associée à x.

3.3. *L'algèbre de Leibniz Bider* $(\mathfrak{g})$. L'ensemble des bidérivations de $\mathfrak{g}$ forme un k-module que l'on munit d'un crochet en posant

$$[(d, D), (d', D')] = (dd' - d'd, Dd' - d'D) .$$

On peut montrer que, non seulement le membre de droite est bien une bidérivation, mais de plus ce crochet vérifie la relation (L). On a ainsi construit l'algèbre de Leibniz des bidérivations de $\mathfrak{g}$, que l'on note Bider $(\mathfrak{g})$. On vérifie aisément que

$$\mathfrak{g} \to \mathrm{Bider}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto (\mathrm{ad}\, x, \mathrm{Ad}\, x)$$

est un morphisme d'algèbres de Leibniz.

4. Extensions abéliennes d'algèbres de Leibniz et représentations

Une *algèbre de Leibniz abélienne* est tout simplement une algèbre de Lie abélienne (i.e. $[x, y] = 0$). Par définition une *extension abélienne* d'algèbres de Leibniz est une suite d'algèbres de Leibniz

$$0 \to M \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to 0$$

qui est exacte et scindée en tant que suite de k-modules et dans laquelle M est une algèbre de Leibniz abélienne.

Cette suite exacte permet de définir deux actions de $\mathfrak{g}$ sur M:

$$[-\,,-]\colon \mathfrak{g} \times M \to M,\ [g, m] := [\tilde{g}, m]\ ,$$
$$[-\,,-]\colon M \times \mathfrak{g} \to M,\ [m, g] := [m, \tilde{g}]\ .$$

Dans ces deux formules $\tilde{g}$ est un relèvement de $g \in \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ et le crochet de droite est celui de $\mathfrak{h}$. La notation ne prête pas à confusion lorsqu'on sait dans quelle algèbre se trouvent les variables.

La relation (L) du crochet de $\mathfrak{h}$ implique que ces deux actions et le crochet de $\mathfrak{g}$ sont reliés par les relations

$$(MLL) \qquad [m, [x, y]] = [[m, x], y] - [[m, y], x]$$
$$(LML) \qquad [x, [m, y]] = [[x, m], y] - [[x, y], m]$$
$$(LLM) \qquad [x, [y, m]] = [[x, y], m] - [[x, m], y]$$

pour tout $m \in M$ et tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

4.1. *Définition.* Pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$, une *représentation* de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un k-module M et de deux applications bilinéaires $[-\,,-]\colon \mathfrak{g} \times M \to M$ et $[-\,,-]\colon M \times \mathfrak{g} \to M$ vérifiant les axiomes (MLL), (LML) et (LLM).

Remarquons que le premier axiome ne fait intervenir que l'action à droite de $\mathfrak{g}$ sur M. Notons aussi que les deux derniers impliquent la relation

$$(ZD) \qquad [x, [y, m]] + [x, [m, y]] = 0\ .$$

4.2. *Représentation adjointe.* Il est clair que si l'on prend $M = \mathfrak{g}$ et que l'on prend pour chacune des actions de $\mathfrak{g}$ le crochet de $\mathfrak{g}$, on obtient une représentation appelée la *représentation adjointe.*

4.3. *Symétries.* Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *symétrique* si

$$[m, x] + [x, m] = 0 \quad \text{pour tout} \quad m \in M, x \in \mathfrak{g}\ .$$

Par exemple si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et M une représentation au sens des algèbres de Lie, alors c'est une représentation symétrique au sens des algèbres de Leibniz.

Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *antisymétrique* si

$$[x, m] = 0 \quad \text{pour tout} \quad m \in M, x \in \mathfrak{g}\ .$$

Il est clair que pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ le noyau $\mathfrak{g}^{\mathrm{ann}}$ (*cf.* 2.1) est une représentation de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$. C'est une représentation antisymétrique.

Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *triviale* si elle est à la fois symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire

$$[x, m] = 0 = [m, x] \quad \text{pour tout} \quad m \in M, x \in \mathfrak{g} .$$

4.4. *Coreprésentations.* Dans l'analogie avec les algèbres associatives, les représentations sont l'analogue des modules à droite (voir ci-dessous thm 5.2). La notion duale, c'est-à-dire l'analogue des modules à gauche, est celle de coreprésentation.

Par définition une *coreprésentation* N de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un k-module et de deux actions $[-\,,-]: \mathfrak{g} \times N \to N$ et $[-\,,-]: N \times \mathfrak{g} \to N$ vérifiant les axiomes suivants

$$(MLL)' \qquad [[x, y], m] = [x, [y, m]] - [y, [x, m]]$$

$$(LML)' \qquad [[y, [m, x]] = [[y, m], x] - [m, [x, y]]$$

$$(LLM)' \qquad [[m, x], y] = [m, [x, y]] - [[y, m], x] ,$$

pour tout $m \in N$ et tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

Notons que les deux dernières relations impliquent la relation

$$(ZD)' \qquad [y, [m, x]] + [[m, x], y] = 0 .$$

Il est clair que toute représentation d'une algèbre de Lie définit à la fois une représentation et une coreprésentation au sens des algèbres de Leibniz.

Le *produit tensoriel* d'une coreprésentation N et d'une représentation M est le quotient de $N \otimes_k M$ par les relations

$$[n, x] \otimes m \sim n \otimes [x, m] \quad \text{et} \quad [x, n] \otimes m \sim n \otimes [m, x]$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}, n \in N$ et $m \in M$.

5. Algèbre enveloppante (*cf.* [L-P]).

La catégorie des représentations d'une algèbre de Leibniz donnée $\mathfrak{g}$ est une catégorie abéliennne. Il est naturel d'essayer de la représenter comme une catégorie de modules sur une certaine algèbre, appelée algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.