Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME FACILE DE WARING
Autor: Revoy, Philippe
Kapitel: Introduction
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58740

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 223-234

LE PROBLÈME FACILE DE WARING

par Philippe REVOY

SUMMARY. THE EASIER WARING PROBLEM. In the ill-named easier Waring problem, the knowledge of the function $v(k)$ is far from precise. Except the trivial majoration $G(k) + 1$, we only have rather large majorations for small k. In this note, I first give the classical facts and the particular cases $k = 4$ and $k = 5$ and I give certain new identities which arose in a paper of L. Vaserstein who gave a better bound for $v(8)$. We finish by a short description of the Tarry-Escott problem which is, for $k \geqslant 9$, the only way to get effective majorations of $v(k)$.

Dans le problème, nommé à tort facile de Waring, la connaissance de la fonction $v(k)$ reste encore imprécise: à l'exception de la majoration évidente par $G(k) + 1$, on ne dispose que de majorations assez larges pour les premières valeurs de l'exposant k. Dans cet article, après avoir repris les généralités classiques et les cas particuliers $k = 4$ et $k = 5$, je donne certaines identités nouvelles englobant en la simplifiant une identité due à Vaserstein qui a amélioré ainsi l'encadrement de $v(8)$ et je termine par des indications sur le problème de Tarry-Escott qui est pour $k \geqslant 9$ la seule source des autres majorations connues de $v(k)$.

INTRODUCTION

Soit $v(k)$ le plus petit entier s tel que tout entier est somme de s entiers de la forme $\pm z^k$, z entier. L'existence de $v(k)$ pour tout k s'établit facilement mais la détermination exacte de $v(k)$ — le problème «facile» de Waring — est délicate. Seuls $v(1) = 1$ et $v(2) = 3$ sont connus; pour les valeurs supérieures, on ne dispose que d'encadrement souvent larges. Ainsi $4 \leqslant v(3) \leqslant 5$, $9 \leqslant v(4) \leqslant 10$, $v(5) \in [5, 10]$, $v(6) \in [6, 14]$, $v(8) \in [17, 28], \ldots$ ([2], [8]).

L'existence de $v(k)$ découle de l'identité suivante:

$$(1) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^{k-1-h} C_{k-1}^{h} (x+h)^k = k!x + c_k$$

pour $k \geqslant 2, c_k \in \mathbf{Z}$. Tout entier n s'écrit $k!x + c_k + m$ où $|m| \leqslant \frac{1}{2}k!$, et m est somme d'au plus $\frac{1}{2}k!$ termes 1^k ou bien -1^k, d'où l'existence et la majoration grossière $v(k) \leqslant 2^{k-1} + \frac{1}{2}k!$, qui est une égalité pour $k = 2$.

L'existence de la constante asymptotique $G(k)$ du problème de Waring (tout grand nombre est somme d'au plus $G(k)$ puissances $k^{\text{ièmes}}$ d'entiers) donne: $v(k) \leqslant G(k) + 1$. Pour tout entier n, choisissant N très grand, $n + N^k$ sera somme d'au plus $G(k)$ puissances $k^{\text{ième}}$, d'où le résultat et la majoration $v(k) = O(k \operatorname{Log} k)$ d'après les résultats de Vinogradov ([1]), où les constantes sont effectives. Cette majoration reste médiocre pour les petites valeurs de k où nous avons des majorations plus précises.

1. La méthode générale suivie ([2], [3]) est en fait de travailler sur les deux côtés: améliorer l'identité (1) pour obtenir un nombre de termes inférieur à 2^{k-1} (possible si $k > 3$) et utiliser des congruences pour améliorer le terme $\frac{1}{2}k!$. Pour n et k des entiers fixés, on pose égal à $\Delta(k;n)$ le plus petit entier s tel que pour tout m la congruence $m \equiv \pm x_1^k \pm x_2^k \pm \ldots \pm x_s^k (n)$ a au moins une solution.

L'existence de $\Delta(k;n)$ est évidente, avec la majoration $\Delta(k;n) \leqslant v(k)$ puisque toute égalité donne une congruence quel que soit le module. Une fonction intéressante est $\Delta(k) = \sup_n \Delta(k;n)$ qui est inférieure ou égale à $v(k)$, seul moyen d'obtenir des minorations de $v(k)$. Le calcul de $\Delta(k;n)$ peut se faire en utilisant la décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_h^{\alpha_h}$: on a alors $\Delta(k;n) = \sup_i \Delta(k;p_i^{\alpha_i})$. Si p_i ne divise pas k, $\Delta(k;p_i^{\alpha_i}) = \Delta(k;p_i) \leqslant k$ en utilisant le lemme de Hensel puis le théorème de Chevalley; si p divise k, la suite $i \mapsto \Delta(k;p^i)$ est stationnaire pour $i \geqslant i_0$ dépendant de l'entier $v_p(k)$, encore une fois d'après le lemme de Hensel. Les résultats les plus simples sont, par exemple

LEMME. $\Delta(3) = 4$, $\Delta(2^n) = 2^{n+1}$ *si* $n \geqslant 2$. *Si* $2k+1$ *est premier,* $\Delta(k; 2k+1) \geqslant k$.

La première affirmation provient de l'étude de x^3 modulo 9. Pour la seconde, il suffit de calculer $\pm x^{2^n}$ modulo 2^{n+2} ([8]). Pour la troisième, comme $p = 2k+1$ est premier $x^k \equiv \left(\frac{x}{p}\right) \bmod p$ où le second membre est $0, \pm 1$, le symbole de Legendre.

En ce qui concerne les identités, soit une égalité

$$\sum_{i=1}^{h} \pm P_i(x)^k = Ax + B \tag{2}$$

où $A \neq 0$ et où les P_i sont des polynômes à coefficients rationnels et à valeurs entières. On pose $v_*(k)$ le plus petit des entiers h tel qu'il existe une identité (2) avec h polynômes P_i: la finitude de $v_*(k)$ provient de (1) et on a $v_*(k) \leqslant 2^{k-1}$. L'essentiel des résultats obtenus provient de

PROPOSITION. $v(k) \leqslant v_*(k) + \Delta(k; A) \leqslant v_*(k) + \Delta(k)$.

C'est un décalque de la démonstration de l'introduction. Notons que le remplacement de $\Delta(k; A)$ par $\Delta(k)$ peut se traduire par une perte nette. Ainsi, si $k = 5$, l'une ou l'autre des deux identités suivantes

$$\begin{aligned}(x+3)^5 - 2(x+2)^5 + x^5 + (x-1)^5 - 2(x-3)^5 \\ + (x-4)^5 = 720x - 360\end{aligned} \tag{3}$$

ou

$$\begin{aligned}(x+3)^5 + (x-3)^5 - (x+1)^5 - (x-1)^5 + 2(2x)^5 \\ - (2x+1)^5 - (2x-1)^5 = 780x\end{aligned} \tag{4}$$

qui donnent $v_*(5) \leqslant 8$ fournissent aussi, du fait de $\Delta(5; 720) = \Delta(5; 780) = 2$, la majoration $v(5) \leqslant 10 = 8 + 2$ alors que $\Delta(5) \geqslant \Delta(5; 11) = 5$. L'identité (3) est classique ([2]); l'identité (4) et d'autres seront données dans les paragraphes suivants. Pour le cas de l'exposant 3, le lecteur peut se reporter à [7] où l'essentiel des résultats connus est démontré avec des références bibliographiques.