2. DÉRIVATIONS ET EXTENSIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'ensemble $e(G;A)$ n'est pas vide car il contient la classe d'équivalence de l'extension

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} A \times G \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

donnée par le produit semi-direct.

1.8. Muni de la somme de Baer l'ensemble $e(G;A)$ a une structure de groupe abélien.

1.9. L'extension donnée par le produit semi-direct est scindée. Si $\sigma: G \to A \times G$ est une section de π on a nécessairement $\sigma(g) = (f_\sigma(g); g)$ où $f_\sigma(g) \in A$. Soit σ_1 et σ_2 deux sections de π; on dit que σ_1 est A-conjuguée à σ_2 s'il existe un élément $a \in A$ tel que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma_1(g) = \iota(a)\sigma_2(g)\iota(a)^{-1}$. On notera $[\sigma]$ la classe de A-conjugaison de la section σ et on désignera par $h(G;A)$ l'ensemble des classes de A-conjugaison des sections de π.

1.10. Si σ_1 et σ_2 sont deux sections de π on définit la section $\sigma_1 + \sigma_2$ en posant $(\sigma_1 + \sigma_2)(g) = (f_{\sigma_1}(g) + f_{\sigma_2}(g); g)$. Cette opération induit sur $h(G;A)$ une structure de groupe abélien.

2. Dérivations et extensions

2.1. Soit G un groupe. L'anneau de groupe $\mathbf{Z}G$ est muni d'une augmentation $\varepsilon: \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ donnée par $\varepsilon(\sum_{g \in G} n_g\, g) = \sum_{g \in G} n_g$. Si on considère $\mathbf{Z}$ avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial à gauche, ε est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-module et on obtient une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

où l'idéal d'augmentation IG est engendré, comme $\mathbf{Z}$-module, par l'ensemble $\{g - 1 \mid g \in G \backslash \{1\}\}$.

2.2. Soit A un $\mathbf{Z}G$-bimodule.

Une dérivation de G dans A est une application $f: G \to A$ telle que, pour tout $g, h \in G$, on ait $f(gh) = f(g) \cdot h + g \cdot f(h)$.

L'ensemble des dérivations de G dans A forme un groupe abélien noté $\mathrm{Der}\,(G;A)$.

Pour tout $a \in A$, l'application $f_a: G \to A$ définie par $f_a(g) = g \cdot a - a \cdot g$ est une dérivation, appelée dérivation intérieure de G dans A.

L'ensemble des dérivations intérieures de G dans A forme un sous-groupe de $\mathrm{Der}\,(G\,;A)$ noté $\mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

2.3. On suppose dorénavant que le groupe G agit à gauche sur le groupe abélien A.

On considère alors A comme un $\mathbf{Z}G$-bimodule en faisant agir G trivialement à droite sur A. Une dérivation de G dans A est donc une application $f: G \to A$ qui satisfait la condition $f(gh) = g \cdot f(h) + f(g)$. On en déduit que $f(1) = 0$.

De plus, pour tout $a \in A$, la dérivation intérieure $f_a: G \to A$ est définie par $f_a(g) = g \cdot a - a$.

2.4. Lemme. *Le groupe* $\mathrm{Der}\,(G\,;A)$ *est isomorphe au sous-groupe de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}G\,;A)$ *formé des morphismes de groupes abéliens* $\bar{f}: \mathbf{Z}G \to A$ *qui satisfont la condition* $\bar{f}(xy) = \bar{f}(x)\varepsilon(y) + x \cdot \bar{f}(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbf{Z}G$.

Démonstration. Si $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ et $x = \sum_{g \in G} n_g g \in \mathbf{Z}G$ on définit $\bar{f}: \mathbf{Z}G \to A$ en posant $\bar{f}(x) = \sum_{g \in G} n_g f(g)$. Inversément si $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}G\,;A)$ satisfait la condition de l'énoncé et si $j: G \to \mathbf{Z}G$ est l'inclusion évidente, on définit une dérivation f en posant $f = \bar{f} \circ j$.

2.5. Proposition. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\omega: \mathrm{Der}\,(G\,;A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;A)\,.$$

Si $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ *on a* $\omega(f)\,(g-1) = f(g)$ *pour tout* $g \in G$.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$; posons $\omega(f) = \bar{f} \circ i$ où $i: IG \to \mathbf{Z}G$ est l'inclusion. Si $x \in \mathbf{Z}G$ et $y \in IG$ on a, d'après le lemme 2.4,

$$\omega(f)\,(xy) = \bar{f}(xy) = \bar{f}(x)\varepsilon(y) + x \cdot \bar{f}(y) = x \cdot \omega(f)\,(y)\,;$$

donc $\omega(f)$ est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules. De plus, pour tout $g \in G$, on a $\omega(f)\,(g-1) = \bar{f}(g-1) = f(g) - f(1) = f(g)$.

Définissons maintenant une application

$$\omega': \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;A) \to \mathrm{Der}\,(G\,;A)\,.$$

Si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;A)$ et $g \in G$ posons $\omega'(u)\,(g) = u(g-1)$. Pour tout $g, h \in G$ on a

$$\begin{aligned}\omega'(u)\,(gh) &= u\big(g(h-1)+(g-1)\big) = g \cdot u(h-1) + u(g-1)\\ &= g \cdot \omega'(u)\,(h) + \omega'(u)\,(g)\,.\end{aligned}$$

Donc $\omega'(u)$ est une dérivation de G dans A. On vérifie immédiatement que $\omega'\omega = 1_{\mathrm{Der}(G\,;\,A)}$ et que $\omega\omega' = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;\,A)}$.

2.6. On rappelle que $h(G\,;A)$ désigne le groupe abélien des classes de A-conjugaison des sections de l'extension de groupes donnée par le produit semi-direct $A \times G$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$F : h(G\,;A) \to \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}\,.$$

Démonstration. Il résulte de 1.9 qu'à toute section $\sigma : G \to A \times G$ on peut associer une application $f_\sigma : G \to A$ telle que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma(g) = (f_\sigma(g)\,;g)$. Compte tenu de la loi de multiplication du produit semi-direct et du fait que σ est un morphisme de groupes, on vérifie que $f_\sigma \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$.

Si σ' est une section A-conjuguée à σ, il existe un élément $a \in A$ tel que $\sigma'(g) = \iota(a)\sigma(g)\iota(a)^{-1}$; on en déduit que $(f_{\sigma'}(g)\,;g) = (a + f_\sigma(g) - g \cdot a\,;g)$ donc que $f_\sigma - f_{\sigma'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

On définit alors l'application F en posant $F([\sigma]) = [f_\sigma]$, où $[f_\sigma]$ désigne la classe de f_σ dans le groupe quotient $\dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$.

Il est immédiat de vérifier que F est un morphisme de groupes et que F est bijective.

3. LE GROUPE $H^1(G\,;A)$

3.1. Soit G un groupe. Comme d'habitude on munit $\mathbf{Z}$ de sa structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche trivial. De plus soit A un $\mathbf{Z}G$-module à gauche; on considère A comme un $\mathbf{Z}G$-bimodule en faisant agir G trivialement sur la droite de A.

On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi : \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)\,.$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G\,;A)$ et de la proposition 2.6, on obtient alors le résultat classique suivant.