

# 6. The solution of the needle problem

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **03.05.2024**

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*

ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

## 6. THE SOLUTION OF THE NEEDLE PROBLEM

The Perron tree gives a simple solution to the Kakeya problem. First we shall show how a needle can go from a straight line to another one parallel to it covering an arbitrarily small area. Let us observe Figure 12.

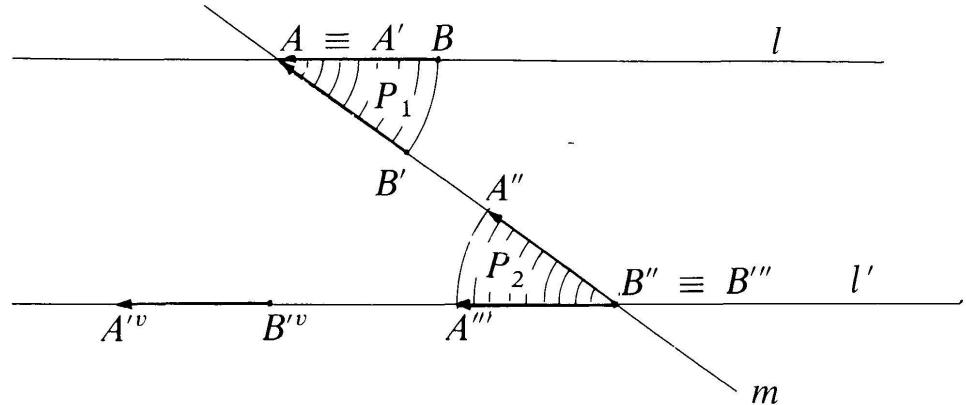


FIGURE 12

If the needle  $AB$  is on  $l$  and we wish to translate it to  $l'$ , we draw through  $A$  a straight line  $m$  intersecting  $l$  and  $l'$  whose direction can be as close to that of  $l$  and  $l'$  as we wish. From  $AB$  we move to  $A'B'$  covering area  $P_1$ , from  $A'B'$  to  $A''B''$  covering null area, from  $A''B''$  to  $A'''B'''$  covering  $P_2$ . Now  $P_1 + P_2$  can be made arbitrarily small if the slope of  $m$  over  $l$  and  $l'$  is small. From  $A'''B'''$  we can move to any other position  $A''''B''''$  on  $l'$  covering again null area.

Let us now assume that the needle is on the side  $AB$  of the initial triangle  $ABC$ . We can assume that  $ABC$  is an equilateral triangle and that its height is of the same length as that of the needle. Let us see how we can move the needle to  $AC$  sweeping an area smaller than  $\eta/3$  with a positive  $\eta$  arbitrarily small.

We construct a Perron tree  $P$  starting from  $ABC$  with an  $\varepsilon > 0$  such that  $\varepsilon S(ABC) < \eta/6$ . Here, as before,  $S(ABC)$  denotes the area of the triangle  $ABC$ . Let  $n$  be the number of small triangles  $T_1, T_2, \dots, T_n$  in which we have to divide  $ABC$  and let  $T'_1 \equiv T_1, T'_2, \dots, T'_n$  be their corresponding final positions in the Perron tree. We shall move the needle inside  $P$  and inside  $n$  figures like that of Figure 12 with an area  $J$  each one such that  $nJ < \eta/6$ . If the needle is on  $AB$  with an extremity on  $A$ , it can move inside  $T'_1 \equiv T_1$ , therefore inside  $P$ , until it comes over the right hand side of  $T'_1$ . Now  $T'_2$  has its left hand side parallel to the right

hand side of  $T'_1$ . Therefore it can move, using the above construction, covering an area  $J$ . Within  $T'_2$ , and so within  $P$ , it can move to the right hand side of  $T'_2$ . From there to the left hand side of  $T'_3$  and so on until it comes to  $AC$ , covering area less than  $\eta/3$ .

It is clear that with three equilateral triangles and three repetitions of this process we can turn the needle around covering area smaller than  $\eta$ .

## 7. THE CONSTRUCTION OF THE BESOCOVITCH SET

The Besicovitch set is also easily built starting from the Perron tree by means of the following auxiliary construction :

(\*\*) *Given an arbitrary parallelogram  $ABCD$  and  $\varepsilon > 0$ , it is possible to construct a finite number of closed parallelograms  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  so that (see Fig. 13):*

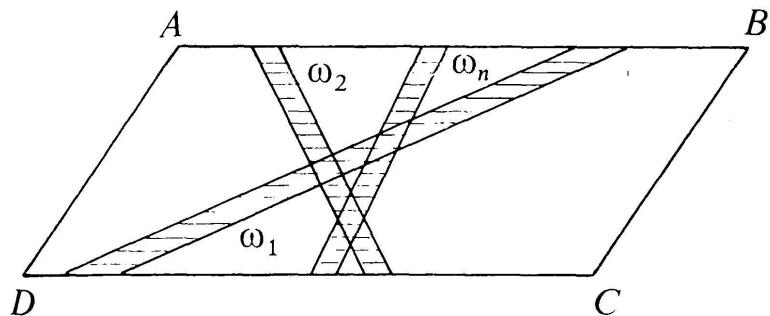


FIGURE 13

- (a) *Each one has one basis on  $AB$  and another one on  $CD$ .*
- (b) *The area of their union is less than  $\varepsilon$ .*
- (c) *For each segment joining a point of  $AB$  to another one of  $CD$  there exists inside some  $\omega_j$  a segment parallel to it of the same length.*

To see this, given  $ABCD$  and  $\varepsilon > 0$  we first take two strips  $\omega_1$  and  $\omega_2$  as indicated in Figure 14 such that  $S(\omega_1) + S(\omega_2) < \varepsilon/4$ . We take now a point  $L$  of  $UV$  so that  $LC$  is parallel to  $UT$ . Then we divide  $VC$  into intervals with the same length smaller than that of  $DV$  and we join  $L$  to the extreme points of these intervals. A typical triangle of the ones so obtained is  $LMN$ . Let  $p$  be