Objekttyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Dabei meint „schwache 2. Stufe", daß auch Quantifikationen über endliche Folgen von Körperelementen zugelassen sind.

Wir skizzieren den Beweis: Falls es eine solche Aussage ρ gäbe, so würde ρ insbesondere in $(\mathbf{R}, S_{\mathrm{N}}^{\mathbf{R}})$ gelten. Ersetzen wir $S_{\mathrm{N}}^{\mathbf{R}}$ in ρ durch seine Definition, so erhalten wir eine Aussage ρ^* der schwachen 2. Stufe, die in $(\mathbf{R}, \mathbf{N})$ gelten würde. Aus Lemma 1 und 2 bei Apt in [A] läßt sich nun (mit einigem technischen Aufwand) folgern, daß es eine Zahl $n \geqslant 2$ gibt, so daß die durch Δ_n^1-Folgen definierten reellen Zahlen einen reell abgeschlossenen Teilkörper R_n von $\mathbf{R}$ bilden, in dem einerseits ρ^* gelten würde, der aber andererseits nicht alle $\mathbf{N}$-definierbaren Schnitte realisiert. Damit müßte einerseits ρ in $(R_n, S_{\mathrm{N}}^{R_n})$ gelten, andererseits ist aber $S_{\mathrm{N}}^{R_n}$ nach dem Lemma im 3. Abschnitt kein Modell von GA_2.

Es sei noch bemerkt, daß die Lemmata 1 und 2 bei Apt unter der Voraussetzung $V = L$ bewiesen werden. Der Satz′ behält dann jedoch auch ohne diese Voraussetzung seine Gültigkeit.

2. Die Menge $S_{\mathrm{N}}^{\mathbf{R}}$ wurde schon von Szczerba und Tarski benützt, um die Unentscheidbarkeit von GA_2 zu beweisen. Weiterhin wurde dieses Modell in Prestel-Szczerba [P-S] benützt, um zu zeigen, daß die Menge derjenigen Aussagen, die in allen Modellen von GA_2 über $\mathbf{R}$ gelten (d.h. in denen das Stetigkeitsaxiom C^2 der 2. Stufe gilt) nicht rekursive axiomatisiert werden kann (also insbesondere größer als die Theorie GA_2 ist). Dies heißt insbesondere, daß das „Elementarisierungsverfahren" hier zu einer echt schwächeren Theorie führen muß. Schließlich wurde von Schwabhäuser in [Sch] für archimedisch geordnete, reell abgeschlossene Körper R eine Charakterisierung derjenigen S_{N}^{R} angekündigt, die Modelle von GA_2 sind. Diese Charakterisierung folgt ebenfalls aus dem Lemma im 3. Abschnitt.

3. Es bleibt eine Frage aus [S-T$_1$] ungelöst, nämlich, ob GA_2 eine endlich axiomatisierbare Obertheorie besitzt.

4. Bei R. Fritsch und U. Friedrichsdorf möchte ich mich für viele informative und anregende Gespräche zu dem Thema dieser Arbeit bedanken.

LITERATUR

[A] Apt, K. R. Non-finite axiomatizability of the second order arithmetic. *Bull. Acad. Polon. Sci. 20* (1972), 347-348.

[C] Coxeter, H. S. M. *Non-Euclidean geometry*. Toronto 1942.

[H] Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1913.

[K] Klingenberg, W. *Grundlagen der Geometrie*. Mannheim 1971.

[M] MONTAGUE, R. Semantical closure and non finite axiomatizability I. *In: Infinitistic Methods*, Warschau 1961, 286-302.

[P-S] PRESTEL, A. and L. W. SZCZERBA. Non-axiomatizability of real general affine geometry. *Fund. Math. 104* (1979), 193-202.

[Sch] SCHWABHÄUSER, W. A class of undecidable models of general affine geometry. *Abstract, presented at the Int. Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Hannover 1979.

[S-T_1] SZCZERBA, L. W. and A. TARSKI. Metamathematical properties of some affine geometries. *In: Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proc. 1964 Int. Congress*, Amsterdam 1965, 166-178.

[S-T_2] —— Metamathematical discussion of some affine geometries. *Fund. Math. 104* (1979), 155-192.

[S] SZMIELEW, W. Some metamathematical problems concerning elementary hyperbolic geometry. *In: The axiomatic method with special reference to geometry and physics*. Ed. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, Amsterdam 1959, 30-52.

[T] TARSKI, A. What is elementary geometry. *In: The axiomatic method with special reference to geometry and physics*. Ed. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, Amsterdam 1959, 16-29.

(Reçu le 9 septembre 1980)

Alexander Prestel

Fakultät für Mathematik
Universität Konstanz
Postfach 5560
West Germany