3. Résidus et formule locale de Gauss-Bonnet

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

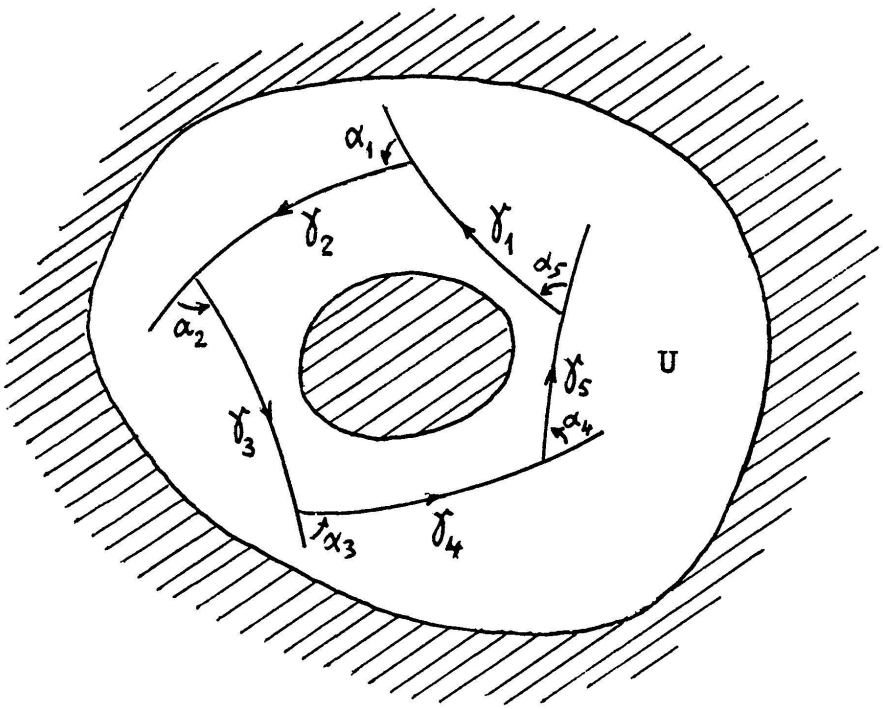
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. Résidus et formule locale de Gauss-Bonnet

Soit P un pavé différentiable de V, dont nous supposerons le bord inclus dans un ouvert parallélisable U de V.



Supposons l'ouvert U muni d'une métrique riemannienne g, et d'une connexion ∇ respectant cette métrique.

Choisissons une orientation de U et notons $\partial P = \Sigma\gamma_i$ le bord orienté de P (orientation de ∂P compatible avec celle de U au sens habituel).

Notons enfin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les discontinuités angulaires de ∂P avec la convention suivante: α_i désigne la mesure comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ de l'angle orienté $\left(\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}\right)$ où M_i désigne le sommet de P qui est extrémité de γ_i et origine de γ_{i+1}.

Définition. On appellera résidu de (∇, g) en P le nombre

$$\text{Rés}_P(\nabla, g) = 1 - \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\partial P} \rho_g \, ds + \sum_P \alpha_i\right].$$

Théorème 1. (i) La définition ci-dessus du résidu ne dépend pas du choix de l'orientation de U.

(ii) Soit $\tilde{U}$ un ouvert contenant U et contenant *tout l'intérieur* de P; soit $\tilde{A}$ un champ de vecteurs *sans singularité* sur $\tilde{U}$, et définissons sur U un champ de repères orthonormés (A, B) en imposant à A d'être positivement colinéaire à $\tilde{A}$ $(A = \tilde{A}/\|\tilde{A}\|)$ sur U. Posant $\omega = \omega_{(A,B)}$, on a alors:

$$\text{Rés}_P(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P} \omega .$$

COROLLAIRE *(formule locale de Gauss-Bonnet)*. Si l'intérieur de P est tout entier inclus dans U, $\quad \text{Rés}_P(\nabla, g) = \dfrac{1}{2\pi} \iint_P \Omega \quad$ (Ω désignant la courbure de ∇).

Pour tout arc différentiable γ de ∂P, dont on note τ le champ des vecteurs tangents, posons en effet

$$\varphi(s) = (A_{\gamma(s)}, \tau_{(s)}) \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} .$$

D'après 2 (vii), $\rho_g = \dfrac{d\varphi}{ds} - \omega(\tau)$.

Donc

$$\int_{\partial P} \rho_g(s)\, ds = \sum_i \int_{\gamma_i} d\varphi - \int_{\partial P} \omega .$$

Mais $\sum_i \int_{\gamma_i} d\varphi = 2\pi - \sum_i \alpha_i$ puisque $\tilde{A}$ est défini sur tout l'intérieur de P, d'où la partie (ii) du théorème.

Supposons maintenant que l'on change l'orientation de U.

1) $\int_{\partial P} \rho_g\, ds$ ne change pas: en effet l'orientation de ∂P est changée, donc τ est changé en $-\tau$; l'orientation de U est changée aussi, donc ν ne change pas. $\nabla_{(-\tau)}(-\tau) = \nabla_\tau \tau = \rho_g \nu$ donc ρ_g ne change pas; ds est changé en $-ds$, et

$$\int_{-\gamma} \rho_g(-ds) = \int_\gamma \rho_g\, ds .$$

2) Les discontinuités angulaires α_i ne changent pas: en effet l'angle en M_i

$$\left(\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}\right)$$

est changé en

$$\left(-\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}, -\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\right) = \left(\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\right):$$

dans le groupe des angles, l'angle est changé en son opposé, mais la mesure des angles dépendant de l'orientation de $T_{M_i}(V)$ et celle-ci étant changée,

α_i = mesure par rapport à l'ancienne orientation (comprise entre $-\pi$ et $+\pi$) de l'angle

$$\left(\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}\right)$$

= mesure par rapport à la nouvelle orientation de

$$\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}, \left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\Bigg).$$

Donc α_i ne change pas.

Ceci achève la démonstration de la partie (i) du théorème.

Si l'intérieur de P est tout entier inclus dans U, la formule de Green-Riemann s'écrit:

$$\int_{\partial P} \omega = \iint_P d\omega = \iint_P \Omega,$$

d'où le corollaire.

Remarque. Si on change l'orientation de U, on change celle de P, et Ω est changé en $-\Omega$, de sorte que $\iint_{P_-} (-\Omega) = \iint_P \Omega$ ne change pas.

4. Théorème des résidus

Supposons désormais la surface V *compacte* (non nécessairement orientable), et soit $U = V - \mathscr{S}$ un ouvert de V. On munit U d'une métrique riemannienne g, et d'une connexion ∇ respectant cette métrique.

On supposera en outre qu'il existe un pavage différentiable $(P_1, ..., P_F)$ de V ayant les propriétés suivantes:

(i) chaque pavé P_λ est inclus dans un ouvert parallélisable U_λ de V,

(ii) $\mathscr{S} = \coprod_{\lambda=1}^{F} \mathscr{S}_\lambda$ où $\mathscr{S}_\lambda$ est un fermé de V (éventuellement vide) inclus dans l'intérieur du pavé P_λ.

Notons F, S et A le nombre de faces, sommets et arêtes de ce pavage. On a alors le