1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

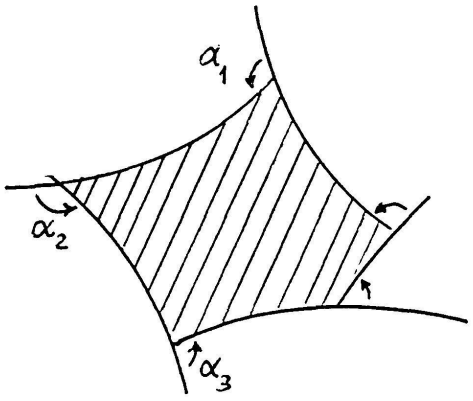
par Daniel LEHMANN [1])

1. INTRODUCTION

On connaît le « théorème local » de Gauss-Bonnet, sur une surface V munie d'une métrique riemannienne g:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_P \Omega = 1 - \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\partial P} \rho_g \, ds + \sum_P \alpha_i\right],$$

ρ_g désignant la courbure géodésique sur le bord ∂P d'un pavé P, α_i les discontinuités angulaires de ∂P et Ω la 2-forme de courbure d'une connexion ∇, quelconque (pas forcément celle de Levi-Civita), respectant la métrique g.



A partir de ce théorème local, on retrouve classiquement le « théorème global » de Gauss-Bonnet quand V est une surface compacte (orientée ou non):

$$\frac{1}{2\pi}\iint_V \Omega = \chi_V \qquad \text{(invariant d'Euler-Poincaré)},$$

en munissant V d'un pavage $(P_1, ..., P_\lambda, ..., P_F)$, et en décomposant l'intégrale $\iint_V \Omega$ sous la forme $\sum_{\lambda=1} \iint_{P\lambda} \Omega$.

Si l'on suppose, maintenant, que la métrique g et la connexion ne sont plus définies qu'au-dessus d'un ouvert $U = V - S$ contenant les sommets et les arêtes du pavage utilisé, autrement dit si $\mathscr{S} = \coprod_{\lambda=1}^{F} \mathscr{S}_\lambda$ où $\mathscr{S}_\lambda$

[1]) ERA au CNRS n° 07-590.

désigne un fermé (éventuellement vide) inclus dans l'intérieur du pavé P_λ, le terme de droite dans la formule locale de Gauss-Bonnet conserve une signification, bien que le terme de gauche $\frac{1}{2\pi}\iint_{P_\lambda} \Omega$ puisse ne plus en avoir: on appellera alors « résidu » de (∇, g) on P_λ l'expression

$$\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 1 - \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\partial P} \rho_g \, ds + \sum_{P\lambda} \alpha_i\right],$$

et on démontrera le « théorème des résidus »

$$\sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \chi_V,$$

dont on verra qu'il contient comme cas particuliers, outre le théorème global de Gauss-Bonnet, le théorème de Hopf relatif à l'indice des champs de vecteurs. [Il contient d'ailleurs aussi la formule de Riemann-Hurwitz pour les revêtements ramifiés (cf. [4]).]

Plus généralement, pour les G-fibrés principaux différentiables $E \to V$ (G groupe de Lie), on peut étendre la théorie de Chern-Weil pour les classes caractéristiques réelles de dimension $\leqslant 2k$ (k entier >0) au cas de connexions définies seulement au-dessus du complémentaire $U = V - \mathscr{S}$ d'une partie fermée $\mathscr{S}$ de V vérifiant la propriété suivante: il existe une triangulation différentiable K de V dont le $2k-1$ squelette $sk^{2k-1}K$ ne rencontre pas $\mathscr{S}$. Lorsque $\mathscr{S} = \varnothing$, on retrouve évidemment la théorie classique de Chern-Weil. On retrouve par contre la théorie de l'obstruction à prolonger à $sk^{2k}K$ une section σ_1 de E définie au-dessus de $sk^{2k-1}K$, prenant pour $\mathscr{S}$ le complémentaire dans V d'un voisinage tubulaire ouvert U de $sk^{2k-1}K$ dans V, pour ω la connexion plate sur $E\big|_U$ associée à la trivialisation définie par une section différentiable σ de $E\big|_U$ dont la restriction à $sk^{2k-1}K$ est homotope à σ_1. (La théorie de Chern-Weil généralise le théorème de Gauss-Bonnet, tandis que la théorie de l'obstruction généralise le théorème de Hopf.)

Bien que cette généralisation ait été rédigée dans [4], il nous a semblé utile d'exposer à part le cas élémentaire de l'invariant d'Euler Poincaré des surfaces compactes, étant donné ses retombées dans l'enseignement universitaire « sous gradué » (cf. par exemple [1] [3] [5] [6] [7]).