4. Critères pour produits amalgamés

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

On en déduit que g et h translatent avec amplitude 2 des chaînes C_g et respectivement C_h, et $C_g \cap C_h$ contient l'arête a ainsi que sa transformée par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La proposition (3.5) implique alors le fait (classique) que g^2 et h^2 engendrent un groupe libre de rang 2 dans $SL_2(\mathbf{Z})$. Observons que le sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ engendré par g et h^2 n'est pas libre, comme en témoigne la relation $(gh^{-2})^4 = 1$. Ceci montre que l'hypothèse $rk_g > q < sk_h$ de (3.5) est essentielle.

4. Critères pour produits amalgamés

Soit B_i, $i \in J$, une famille de sous-groupes d'un groupe G et soit F un sous-groupe de $\bigcap_{i \in J} B_i$. Les inclusions $B_i \subset G$ s'étendent en un unique homomorphisme $\Psi : *_F B_i \to G$, où $*_F B_i$ dénote le produit de tous les B_i amalgamé sur F.

(4.1) Proposition. *Soient B_i, G et F comme ci-dessus. On suppose que le groupe G agit sur un ensemble X et qu'il existe une famille L_i $(i \in J)$ de sous-ensembles de X et un élément $d \in X - \bigcup_{i \in J} L_i$ tels que:*

1) $F \subset G_d$

2) $(B_i - F)(L_j \cup \{ d \}) \subset L_i$, pour tout $i, j \in J$ avec $i \neq j$.

Alors, l'homomorphisme $\Psi : *_F B_i \to G$ induits par les inclusions $B_i \subset G$ est injectif.

Démonstration. Tout élément $g \in *_F B_i$ peut s'écrire $g = g_1 f$ avec $f \in F$ et $g_1 = b_n b_{n-1} \dots b_1$, où les B_k sont des éléments de $B_{i(k)} - F$, avec $i(k) \in J$ et $i(k) \neq i(k+1)$. Si $\Psi(g) = 1$ et $g \neq 1$, cela entraîne que $g_1 \neq 1$, puisque $\Psi \mid F$ est injectif. Mais alors, si $g_1 \neq 1$, nos hypothèses font que $\Psi(g)\, d \in L_{i(n)}$. Comme $d \notin L_{i(n)}$, cela montre que $\Psi(g) \neq 1$, d'où Ψ est injectif. ■

(4.2) *Remarques.* 1) Il résulte de la démonstration ci-dessus que l'hypothèse 2) de (4.1) peut être affaiblie en: $X_i(L_j \cup \{ d \}) \subset L_i$, pour tout i, $j \in J$ avec $i \neq j$, où X_i est un ensemble de représentants des classes à gauche non-triviales de B_i modulo F.

2) Le cas $F = 1$ redonne la Proposition 1.1 de [Ti 2].

(4.3) COROLLAIRE. *Soit* G *un groupe agissant sur un arbre* Γ. *Soit* $a \in \mathrm{Ar}\,\Gamma$ *avec* $o(a) = u$ *et* $e(a) = v$. *Alors, l'homomorphisme* $\Psi : G_u *_{G_a} G_v \to G$ *induit par les inclusions dans* G *des groupes d'isotropie de* u, v *et* a *est injectif.*

Démonstration. Soit $\dot{\Gamma}$ le premier subdivisé barycentrique de Γ. Rappelons que le graphe $\dot{\Gamma}$ peut être défini par:

$$\mathrm{Som}\,\dot{\Gamma} = \mathrm{Som}\,\Gamma \cup \mathrm{Ar}\,\Gamma$$

$$\mathrm{Ar}\,\dot{\Gamma} = \{ (x, b) \in \mathrm{Som}\,\Gamma \times \mathrm{Ar}\,\Gamma \mid o(b) = x \} \cup \{ (b, x) \in \mathrm{Ar}\,\Gamma \times \mathrm{Som}\,\Gamma \mid e(b) = x \}$$

avec

$$o(x, b) = x, \quad e(x, b) = b,$$

$$o(b, x) = b \quad \text{et} \quad e(b, x) = x.$$

Le graphe $\dot{\Gamma}$ est un arbre si et seulement si Γ en est un.

Le corollaire (4.3) se déduit par application du critère (4.1) à la situation:

$$X = \mathrm{Som}\,\dot{\Gamma}, \quad B_1 = G_u, \quad B_2 = G_v, \quad F = G_a = G_{(u,a)} = G_{(a,v)}$$

$$L_1 = \mathrm{Som}\,\mathscr{R}(u, a), \quad L_2 = \mathrm{Som}\,\mathscr{B}(a, v), \quad d = a \in \mathrm{Som}\,\dot{\Gamma}$$

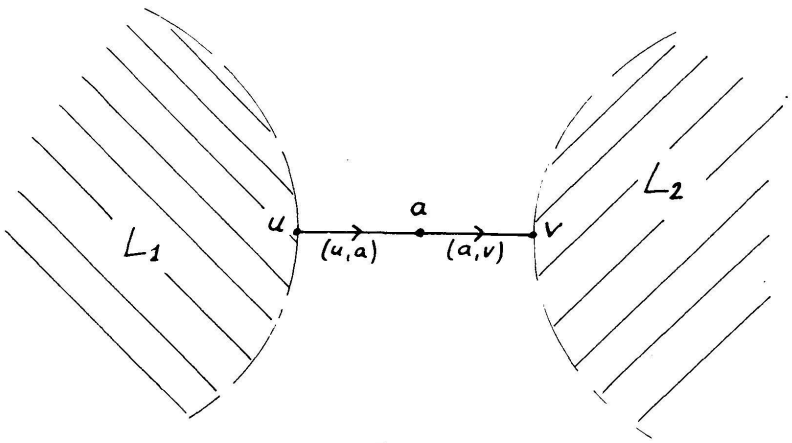

FIG. 7.

(4.4) COROLLAIRE. (Bass-Serre, [Se, § 4]). *Soit* G *un groupe agissant sur un arbre* Γ *de manière que le graphe quotient* $G \backslash \Gamma$ *soit un segment (arbre comportant une seule arête). Soit* $a \in \mathrm{Ar}\,\Gamma$, *avec* $o(a) = u$ *et* $e(a) = v$. *Alors, l'homomorphisme* $\Psi : G_u *_{G_a} G_v \to G$ *induit par les inclusions est un isomorphisme.*

Démonstration. L'homomorphisme Ψ est injectif par (4.3). Pour démontrer la surjectivité de Ψ, on observe que l'arête a se projette sur l'unique arête $\bar{a}$ de $G\backslash\Gamma$, ce qui entraîne que $B = \{ u, v \}$ est un ensemble de représentants pour l'action de G sur Som Γ. La proposition (2.4) assure alors que G est engendré par $G_u \cup R_B$, avec $R_B = \{ r \in G \mid$ il existe $s_r \in$ Ar Γ telle que $o(s_r) \in B$ et $e(s_r) \in rB \}$. Soit $r \in R_B$. Comme toutes les arêtes de Γ sont dans l'orbite de a, il existe $h_r \in G$ tel que $s_r = h_r a$. De plus, $o(s_r) = o(a) = u$, d'où $h_r \in G_u$. Donc $e(s_r) = rv = h_r v$, d'où $h_r^{-1} r \in G_v$. On en déduit que G est engendré par $G_u \cup G_v$, d'où la surjectivité de Ψ. ■

5. Critère pour les *HNN*-extensions

Soit F un sous-groupe d'un groupe H. Soit $\phi : F \to H$ un homomorphisme injectif (un autre plongement de F dans H). Désignons par $< z >$ le groupe cyclique infini de générateur z. Rappelons que l'on définit le groupe $HNN(H, F, \phi)$ comme le quotient du produit libre $H * < z >$ par la clôture normale des éléments $z^{-1} f z\, \phi(f)^{-1}$ pour $f \in F$. On dit que le groupe $H^* = HNN(H, F, \phi)$ est obtenu de H, F et ϕ par la *construction HNN*. Le groupe H s'appelle la *base* de H^*, z s'appelle la *lettre stable* et F et $\phi(F)$ sont les *sous-groupes associés* [L-S, Chap. IV, § 2]. Nous allons démontrer le critère suivant pour reconnaître une *HNN*-extension dans un groupe:

(5.1) Théorème *Soit G un groupe, $F \subset H \subset G$ des sous-groupes de G et $z \in G$ tel que $z^{-1} F z \subset H$. Désignons par $\phi : F \to H$ l'homomorphisme $\phi(f) = z^{-1} f z$. On suppose que G agit sur un ensemble X et qu'il existe des sous-ensembles L_F et L_ϕ de X ainsi qu'un élément $d \in X - (L_F \cup L_\phi)$ satisfaisant aux conditions suivantes: (notation: $\bar{L}_F = L_F \cup \{ d \}$ $\bar{L}_\phi = L_\phi \cup \{ d \}$)*

1) $F \subset G_d$
2) $(H - F)\, \bar{L}_\phi \subset L_F$
3) $z(H - \phi(F))\, z^{-1}\, \bar{L}_F \subset L_\phi$
4) $z^{-1} \bar{L}_F \subset L_F$ et $z \bar{L}_\phi \subset L_\phi$
5) $z(L_F - z^{-1} \bar{L}_F) \subset L_\phi$ et $z^{-1}(L_\phi - z \bar{L}_\phi) \subset L_F$
6) $(H - F)\, \bar{L}_\phi \cap z^{-1}\, \bar{L}_F = \emptyset$ et $z(H - \phi(F))\, z^{-1}\, \bar{L}_F \cap z \bar{L}_\phi = \emptyset$

Alors, l'homomorphisme $\Psi : HNN(H, F, \phi) \to G$ induit par les inclusions (avec z comme lettre stable) est injectif.