Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES DANS LES QUATERNIONS
Autor: Beck, Bernard
Kapitel: I. Rappels et notations
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50378

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES DANS LES QUATERNIONS

par Bernard BECK

Soit H un corps de quaternions généralisés, de centre K (voir [1]).

Le but de cet article est d'étudier les solutions dans H de l'équation

$$P(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_0 = 0 \tag{1}$$

où $q_r \in H$, $r = 0, 1, \dots, n$ et $q_n \neq 0$.

Dans le cas où le corps K est le corps des nombres réels et H le corps des quaternions classiques, I. Niven [2] a démontré les résultats suivants:

(i) L'équation (1) admet toujours une solution dans H.

(ii) L'équation (1) admet une infinité de solutions dans H si et seulement si $P(x) = Q(x)(x^2 - 2tx + r)$ où $t, r \in K$, $t^2 < r$.

(iii) Si le nombre de solutions de (1) est fini, celui-ci est au plus $(2n-1)^2$.

On étudie ici l'équation (1) dans le cas le plus général, en reliant les solutions de (1) aux racines d'un polynôme $n(P)$ à une indéterminée à coefficients dans K: c'est le théorème de la partie II.

Dans la partie III, on étudie les conséquences de ce théorème et on montre notamment les résultats suivants:

— Si le nombre de solutions de (1) est fini, celui-ci est inférieur ou égal à n.

— Il existe un unique polynôme P unitaire de degré n à coefficients dans H admettant n racines 2 à 2 non conjuguées.

I. RAPPELS ET NOTATIONS

Soit H un corps de quaternions généralisés. On sait que H est un espace vectoriel de dimension 4 sur son centre K et qu'il existe sur H un antiautomorphisme involutif, $q \mapsto \bar{q}$, tel que, quels que soient les éléments λ de K et q, q' de H, on ait

$$\overline{q+q'} = \bar{q} + \bar{q}, \qquad \bar{q}\bar{q}' = \bar{q}' \cdot \bar{q}, \qquad \bar{\bar{q}} = q, \qquad \bar{\lambda} = \lambda$$

(si la caractéristique de K est différente de 2, alors $K = \{\mu \in H \mid \bar{\mu} = \mu\}$, mais cela est faux en caractéristique 2). A tout quaternion q de H, on associe deux éléments de K

$$n(q) = q\bar{q} = \bar{q}q, \quad \text{appelé la } \textit{norme} \text{ de } q,$$
$$t(q) = q + \bar{q}, \quad \text{appelé la } \textit{trace} \text{ de } q,$$

ainsi que le polynôme de $K[X]$

$$\Delta_q(X) = X^2 - t(q)X + n(q),$$

appelé polynôme caractéristique de q. On a alors $\Delta_q(q) = 0$. Citons sans démonstration les résultats suivants:

Résultat 1. Deux éléments q et q' de H sont conjugués (i.e. il existe $\sigma \in H^*$ tel que $q' = \sigma q \sigma^{-1}$), si et seulement s'ils ont même polynôme caractéristique.

Résultat 2. Le polynôme Δ_q est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si q n'est pas dans K.

Résultat 3. Tout élément q de H qui n'est pas dans K admet une infinité de conjugués distincts.

Ces trois résultats montrent que si q n'est pas dans K, le polynôme $\Delta_q(X)$ a une infinité de racines dans H. Pour les autres propriétés des corps de quaternions, voir [1].

On considère l'anneau $H[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans H où l'indéterminée commute avec les coefficients. Alors $H[X]$ est un $K[X]$-module à droite libre de rang 4; en effet, soit $\{q_1, \ldots, q_4\}$ une base du K-espace vectoriel H; tout polynôme P de $H[X]$ s'écrit de manière évidente

$$P(X) = \sum_{i=1}^{4} q_i F_i(X) \quad \text{avec} \quad F_i(X) \in K[X].$$

Résultat 4. Tout polynôme P de $H[X]$ se factorise de manière unique en $P = P_1 F$ avec F unitaire dans $K[X]$, P_1 n'étant divisible par aucun polynôme non constant de $K[X]$.

Démonstration. On écrit $P(X) = \sum_{i=1}^{4} q_i F_i(X)$ comme précédemment et on prend pour F le P.G.C.D. des F_i. $\square$

Résultat 5. $H[X]$ est un $K[X]$-module à droite euclidien, i.e. pour tout polynôme P de $H[X]$ et pour tout polynôme F de $K[X]$, il existe deux polynômes Q et R de $H[X]$ tels que degré $R <$ degré F et $P = QF + R$.

Démonstration. On écrit $P(X) = \sum_{i=1}^{4} q_i F_i(X)$ et on effectue la division euclidienne des F_i par F. □

Etant donné un polynôme $P(X) = \sum_{r=0}^{n} q_r X^r$ dans $H[X]$, on pose $\bar{P}(X) = \sum_{r=0}^{n} \bar{q}_r X^r$ et

$$n(p) = P \cdot \bar{P} = \sum_{0 \leq r,\, s \leq n} q_r \bar{q}_s X^{r+s}.$$

Résultat 6. Le polynôme $n(P)$ est un élément de $K[X]$.

Démonstration. On a $n(P) = \sum_{l=0}^{2n} \alpha_l X^l$

et

$$\alpha_l = \sum_{\substack{1 \leq r,\, s \leq n \\ r+s=l}} q_r \bar{q}_s = a_l + \sum_{\substack{0 \leq r < s \leq n \\ r+s=l}} t(q_r \bar{q}_s),$$

où

$$a = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ est impair} \\ n(q_{l/2}) & \text{si } l \text{ est pair} \end{cases}$$

Donc $\alpha_l \in K$. □

Définissons à présent les racines d'un polynôme de $H[X]$. Tout élément $P(X) = \sum_{r=0}^{n} q_r X^r$ de $H[X]$ peut être considéré comme une fonction sur H en posant $P(x) = \sum_{r=0}^{n} q_r x^r$ pour tout x dans H, *la variable étant toujours à droite des coefficients.* La multiplication sur $H[X]$ ne définit pas une multiplication de fonctions au sens habituel; toutefois, si $P \in H[X]$ et si $F \in K[X]$, alors, pour tout élément x de H, on a

$$P.F(x) = P(x)F(x).$$

(On peut traduire cela en disant que $H[X]$ est canoniquement isomorphe en tant que $K[X]$-module à droite à l'ensemble des fonctions polynômes sur H à variable à droite.)

On dit qu'un quaternion x est *racine* du polynôme P si $P(x) = 0$.