Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS POLYNÔMIALES DE DEGRÉ DEUX DU PLAN PROJECTIF COMPLEXE DANS LUI-MÊME

Autor: Ronga, Felice

Kapitel: 2. Une coïncidence

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48175

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Soit maintenant $f : P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$ une application de degré $d \geqslant 2$; il suit de 1.1 qu'en déformant arbitrairement peu f on peut la rendre générique pour les singularités de Boardman d'ordre deux: on dira alors que f est « générique ». Si f est donc générique, ses seules singularités sont $\sum^1 (f) = \{z \in P\mathbf{C}^2 \mid \dim (\ker (df_z)) = 1\}$, qui est une courbe régulière, et $\sum^{1,1} (f) = \{z \in P\mathbf{C}^2 \mid \ker (df_z) = T_z (\sum^1 (f))\}$, qui est un ensemble fini de points (T_z désigne l'espace tangent au point z).

1.3. Proposition. *Soit* $f : P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$ *une application générique de degré* d. *Alors* $\sum^1 (f)$ *est une courbe régulière de degré* $3.(d-1)$ *et* $\sum^{1,1} (f)$ *est constitué de* $3 . (4d-5) . (d-1)$ *points.*

Démonstration: Soit $s \in H^2 (P\mathbf{C}^2)$ la classe d'Euler du fibré canonique et désignons par $N(f) = f^* (T(P\mathbf{C}^2)) - T(P\mathbf{C}^2)$ le fibré virtuel normal à f. On a que $c(T(P\mathbf{C}^2)) = 1 + 3s + 3s^2$, où c désigne la classe de Chern totale, et $f^* (s) = d . s$. La classe duale à $\sum^1 (f)$ est égale à

$$(*) \quad c_1 (N(f)) = f^* (3s) - 3s = 3 (d-1) . s .$$

La classe duale à $\sum^{1,1} (f)$ est égale à

$$(**) \quad c_1^2 (N(f)) + c_2 (N(f)) = 3 (d-1) (4d-5) . s^2 .$$

L'expression de ces classes duales est calculée par exemple dans [1]. On obtient les formules cherchées en évaluant (*) et (**) respectivement sur la classe fondamentale d'un hyperplan et sur la classe fondamentale de $P\mathbf{C}^2$, ce qui revient à remplacer s par 1.

En fait, on se convainc facilement que pour toute application f de degré d le lieu singulier, qu'on désignera dorénavant par $\sum (f)$, a pour équation: $\text{dét} \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right)_{i,j=0,1,2} = 0$, ce qui définit bien une courbe de degré $3 (d-1)$.

2. Une coïncidence

On se borne dorénavant aux applications de degré deux de $P\mathbf{C}^2$ dans $P\mathbf{C}^2$; l'ensemble $A^2 (2, 2)$ de ces applications est un ouvert de Zariski de $P\mathbf{C}^{17}$, sur lequel opère $P(G1 (3, \mathbf{C})) \times P(G1 (3, \mathbf{C}))$, qui est de dimension 16; l'orbite générique a donc une codimension au moins égale à un. Le lieu singulier d'une telle application est une cubique; l'ensemble des cubiques de $P\mathbf{C}^2$ s'identifie à $P\mathbf{C}^9$. Si l'on fait agir $P(GL (3, \mathbf{C}))$ sur ces cubiques, l'orbite générique est de codimension un. On peut donc s'attendre

à ce que si f est générique l'orbite de $\sum(f)$ détermine l'orbite de f à un nombre fini de choix près; les propositions qui suivent vont nous dire comment.

2.1. PROPOSITION. *Soit $f : PC^2 \to PC^2$ une application générique. Alors si $p \in \sum^{1,1}(f)$, la droite tangente à $\sum(f)$ en p recoupe $\sum(f)$ en un point d'inflexion.*

La démonstration de cette proposition est précédée de trois lemmes.

2.2. LEMME. Soit $g : PC^1 \to PC^2$ une application de degré deux. S'il existe $p \in PC^1$ tel que $dg_p = 0$, $g(PC^1)$ est une droite et il existe un et un seul point $q \neq p$ tel que $dg_q = 0$.

Démonstration: Si $dg_p = 0$, $g(PC^1)$ est une conique irréductible avec un point double: ce ne peut être qu'une droite double. $g : PC^1 \to g(PC^1)$ est une application générique de degré deux: dans ce cas elle a exactement deux points singuliers distincts.

2.3. LEMME. Soit $f : PC^2 \to PC^2$ de degré deux générique. Si $p \in \sum^{1,1}(f)$, il existe une et une seule droite $d \subset PC^2$ passant par p, telle que $d \cap \sum(f) = \{p, q_1, q_2\}$, p, q_1 et q_2 distincts, et telle que $d = \ker(df_{q_1}) = \ker(df_{q_2})$.

Démonstration: Soit $a \in H^2(\sum(f))$ la classe fondamentale en cohomologie de $\sum(f)$ et $b \in H^2(\sum(f))$ la classe duale à $\sum^{1,1}(f)$ dans $\sum(f)$; soit N le fibré normal à $\sum(f)$ dans PC^2 et $K = \ker(df)$, fibré de rang 1 sur $\sum(f)$. Puisque f est générique, on a: $b = 9 \,.\, a = c_1(N) - c_1(K)$; $\sum(f)$ étant une cubique, on a: $c_1(N) = 9 \,.\, a$. Ainsi $c_1(K) = 0$. Soit d' une droite ne passant pas par p et $g : \sum(f) \to d'$ l'application qui à $q \in \sum(f)$ associe $(p, q) \cap d'$, où (p, q) désigne la droite par p et q, et $(p, p) = T_p(\sum(f))$. $\sum(f)$ étant une cubique, $c_1(g^*(T(d'))) = 3 \,.\, a$; il s'en suit que $c_1(g^*(T(d'))) - c_1(K) = 6 \,.\, a$. On en déduit que le nombre de points singuliers comptés avec multiplicité du morphisme $G : K \to g^*(T(d'))$, donné par projection de K sur d' depuis p, est égal à 6. Le point p est une singularité de ce morphisme, mais sa multiplicité ne peut excéder 3, sans quoi f admettrait en p un point singulier non générique. Il doit donc exister un point q_1 distinct de p où G est singulier, ce qui revient à dire que $\ker(df_{q_1}) = (p, q_1)$ et $(p, q_1) \neq T_p(\sum(f))$. A cause du lemme 2.2 il doit exister q_2 distinct de q_1 tel que $(p, q_1) = \ker(df_{q_2})$; on a forcémment que $q_2 \neq p$, sans quoi $(p, q_1) = \ker(df_p) = T_p(\sum(f))$. On pose $d = (p, q_1)$; l'unicité de d suit du fait que G ne peut avoir plus de 6 points singuliers.

2.4. Lemme. Soient g et g': $P\mathbf{C}^1 \to P\mathbf{C}^2$ deux applications de degré deux. Alors:

(i) si g et g' coïncident en quatre points, elles coïncident partout;

(ii) si $g(P\mathbf{C}^1)$ = une droite et g et g' coïncident en trois points, elles coïncident partout.

Ce lemme est un petit exercice dont la démonstration est laissée au lecteur.

Démonstration de 2.1. (voir fig. du §3): Soit $p \in \sum^{1,1}(f)$ et d la droite donnée par 2.4. La tangente à $\sum(f)$ en p recoupe $\sum(f)$ en un point i; on a que $i \neq p$, sans quoi la restriction de f à cette tangente serait en contradiction avec 2.2. Soit $e = f(d)$, qui est une droite d'après 2.2; $f^{-1}(e)$ est une conique contenant d, donc dégénérée en la réunion de d et une autre droite d'. Puisque $f(d') = e$, qui est une droite, $d' = (i, p)$, sans quoi on serait en contradiction avec l'unicité de d démontrée dans 2.3.; ainsi, $f(i) \in e$. Soit h: $P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$ la symétrie de centre i qui laisse d fixe point par point. Soient $r \in P\mathbf{C}^2 - (i, p) - d$, $r' = h(r)$ et H: $P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$ la symétrie qui envoit $f(r)$ sur $f(r')$ et qui laisse e fixe point par point. Considérons l'application $g = H.f.h^{-1}$; on a que $f \mid d = g \mid d$, $f \mid (i, p) = g \mid (i, p)$ et $f \mid (r, r') = g \mid (r, r')$. Si $s \in \sum(f) - \sum^{1,1}(f)$, $f(\ker(df_s))$ est une droite et $g \mid \ker(df_s)$ coïncide avec $f \mid \ker(df_s)$ aux trois points d'intersection de $\ker(df_s)$ avec les droites d, (i, p) et (r, r'). On en déduit que $f = g$, en particulier h envoit $\sum(f)$ dans elle-même; i étant un point fixe de h, ce doit être un point d'inflexion, car ceux-cis sont en nombre impair et ils sont échangés par h.

2.5. Corollaire. *Soient f et f' : $P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$ deux applications de degré deux génériques. Si $\sum(f) = \sum(f')$ et $\sum^{1,1}(f) \cap \sum^{1,1}(f') \neq \varnothing$, alors il existe un automorphisme H: $P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$ tel que $H.f' = f$, et $\sum^{1,1}(f) = \sum^{1,1}(f')$.*

Démonstration: Soit $p \in \sum^{1,1}(f) \cap \sum^{1,1}(f')$; posons $i = T_p(\sum(f)) \cap \sum(f)$. Il suit des hypothèses et de 2.1 qu'on a aussi $i = T_p(\sum(f')) \cap \sum(f')$. Les points q_1 et q_2 construits dans la démonstration de 2.1 coïncident pour f et f', puisqu'ils sont déterminés par le fait que $(i, q_1) = T_{q1}(\sum(f))$, $(i, q_2) = T_{q2}(\sum(f))$ et que $\sum(f) = \sum(f')$. Soit $r \in \sum(f)$, r distinct de i, p, q_1, q_2; soit H: $P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$ l'automorphisme qui envoit $f'(p)$ sur $f(p)$ $f'(q_1)$ sur $f(q_1)$, $f'(q_2)$ sur $f(q_2)$ et $f'(r)$ sur $f(r)$. Puisque p, q_1 et q_2 sont alignés, on peut encore exiger que H envoie la droite $(f'(r), f'(r'))$ sur la droite $(f(r), f(r'))$, r' étant le symétrique de r pour la symétrie h construite

dans la démonstration de 2.1. Puisque $f'^{-1}(f'(d)) = d \cup (i, p)$, f et $H . f'$ coïncident sur d, sur (i, p) et sur (r, r'), donc elles coïncident partout.

Soit C une cubique non singulière de $P\mathbf{C}^2$ et $i \in C$ un point d'inflexion. La classe de C étant 6, il existe en plus de $T_i(C)$, qui compte pour trois droites, trois autres droites distinctes passant par i et tangentes à C en des points r_1, r_2 et r_3.

2.6. Proposition. *Avec les notations ci-dessus, si p est l'un des points r_1, r_2 ou r_3, il existe une application générique $f : P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$ telle que $C = \sum(f)$ et $p \in \sum^{1,1}(f)$.*

Démonstration: Soit $f_t = (z_0^2 + z_1 . z_2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + t . z_0 . z_1)$. On vérifie que si $t \neq -1$, f_t définit bien une application de $P\mathbf{C}^2$ dans lui-même. Le lieu singulier de f_t a pour équation

$$z_0 . z_1 . z_2 . (8+2t) - 2t . (z_0^3 + z_1^3) - 2z_2^3 = 0 .$$

On vérifie que si $t \neq 0$ et $t \neq 8$ ce lieu est une cubique non singulière; on montrera sous 3.1. qu'il s'en suit que f_t est générique. On calcule que $i = (1, 1, 0)$ est un point d'inflexion de $\sum(f)$ et que les points p, q_1 et q_2 correspondants ont pour coordonnées: $p = (1/2, 1/2, 1)$, $q_1 = (-(s+1)^{-1}, -(s+1)^{-1}, 1)$, $q_2 = ((s-1)^{-1}, (s-1)^{-1}, 1)$, où $s = (1+t)^{1/2}$, la racine ayant une détermination quelconque (changer de détermination revient à échanger q_1 et q_2). En prenant $s \neq 0, \pm 1, \pm 3$ on s'assure que $t \neq -1, 0$ et 8. On se propose de mettre l'équation de $\sum(f)$ en coordonnées inhomogènes ($z_2 = 1$) sous la forme

$$z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - B) , \quad \text{où} \quad B \neq 0, 1,$$
$$\text{avec} \quad p = (0, 0, 1), \quad q_1 = (1, 0, 1), \quad q_2 = (B, 0, 1) .$$

Si $t = -4$, l'équation devient: $8z_0^3 + 8z_1^3 - 2z_2^3 = 0$. Après le changement de coordonnées

$$z_0 = z_2' - z_1' ; \quad z_1 = z_2' + z_1' ; \quad z_2 = z_0' . (i\sqrt{3} - 3) + 2z_2' ,$$

en omettant les primes, l'équation devient

$$A . z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - 1/2 . (i\sqrt{3} + 1)) , \quad \text{où} \quad A \neq 0 .$$

Après un changement de coordonnées évident, A est remplacée par 1.

Si $s \neq \pm i\sqrt{3}$, on aura $t \neq -4$. Pour mettre l'équation sous la forme voulue, il faut envoyer la tangente à $\sum(f)$ en i sur la droite $z_2 = 0$ et les

points p, q_1 et q_2 respectivement sur (0, 0, 1), (1, 0, 1) et (B, 0, 1). Pour cela, il faut effectuer le changement de coordonnées

$$z_0' = \frac{(s-3)^2 . (s+1)}{(s+3) . (s^2+3)} . (z_2 - z_1 - z_0) ; \quad z_1' = 1/2 . (z_1 - z_0) ;$$

$$z_2' = \frac{3(s^2-1)}{s^2+3} . (z_0 + z_1) + z_2 .$$

Après omission des primes, l'équation de $\sum(f)$ devient

$$A . z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - B) , \quad \text{où} \quad B = \frac{(s+1) . (s-3)^3}{(s-1) . (s+3)^3}$$

On peut supposer que l'équation de la cubique C donnée soit $z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - b)$, où $b \neq 0, 1$, et que $p = (0, 0, 1)$. Les valeurs interdites de s sont $s = 0$, qui donne $B = 1$; $s = -1$, d'où $B = 0$ et $s = i\sqrt{3}$, d'où $B = ½ . (i\sqrt{3}+1)$. Ce dernier cas se ramène au cas où $t = -4$. Sinon, on peut résoudre par rapport à s dans l'équation

$$b = \frac{(s+1) . (s-3)^3}{(s-1) . (s+3)^3} ,$$

puis on pose $t = s^2 - 1$ et f_t est alors l'application cherchée.

Ainsi, d'après 2.5 et 2.6, la cubique non singulière C détermine l'orbite de l'application f telle que $\sum(f) = C$, au choix près de $p \in \sum^{1,1}(f)$ parmi les points r_1, r_2 et r_3 de C.

2.7. *Remarque.* Soit C la cubique d'équation $z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - b)$; l'automorphisme de $P\mathbf{C}^2 : (z_0, z_1, z_2) \to (z_0, -z_1, z_2)$ laisse C invariante. On obtient de manière analogue d'autres tels automorphismes en envoyant chacun des neuf points d'inflexion de C sur (0, 1, 0); on engendre ainsi un groupe G à 18 éléments. Il est bien connu qu'en général ce groupe est celui de tous les automorphismes de $P\mathbf{C}^2$ qui laissent C invariante, à deux exceptions près. La première, c'est lorsque les points 0, 1 et $b \in C$ peuvent être envoyés, par une transformation du type $z \to az + A$, sur les trois racines troisièmes de l'unité, ce qui équivaut à dire que $b = ½ . (i\sqrt{3}+1)$; c'était le cas de $\sum(f_t)$ pour $t = -4$. Dans ce cas il faut ajouter à G le groupe d'ordre 3 engendré par

$$(z_0, z_1, z_2) \to \left(z_0 . \frac{1}{2} . (i\sqrt{3} - 1), z_1, z_2 \right)$$

(ce qui équivaut aux permutations cycliques des racines troisième de l'unité), et cela donne en tout un groupe d'ordre 54. La deuxième exception est lorsque $b = -1$; dans ce cas, auquel appartient $\sum(f_t)$ lorsque $t = -10 \pm \sqrt{108}$, il faut ajouter à G le groupe d'ordre deux engendré par $(z_0, z_1, z_2) \to (-z_0, i.z_1, z_2)$ et on obtient en tout un groupe d'ordre 36.

Pour la détermination du groupe des automorphismes qui laissent invariante une cubique, on peut consulter [2], pages 84 et 85.

3. Classification

Considérons la famille d'applications

$$f_T(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 + t_0 \,.\, z_1 \,.\, z_2,\ z_1^2 + t_1 \,.\, z_0 \,.\, z_2,\ z_2^2 + t_2 \,.\, z_0 \,.\, z_1)\,,$$
$$\text{où} \quad T = (t_0, t_1, t_2)\,;$$

on vérifie que f_T définit bien une application de PC^2 dans lui-même à condition que $t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2 \neq -1$. On va distinguer dans cette famille quatre cas:

I) t_0, t_1 et $t_2 \neq 0$ et $t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2 \neq 8$. Après changement de coordonnées à la source: $z_0 = t_0^{2/3} \,.\, t_1^{1/3} \,.\, z_0'$, $z_1 = t_0^{1/3} \,.\, t_1^{2/3} \,.\, z_1'$, $z_2 = z_2'$, et au but: $w_0' = t_0^{-4/3} \,.\, t_1^{-2/3} \,.\, w_0$, $w_1' = t_0^{-2/3} \,.\, t_1^{-4/3} \,.\, w_1$, $w_2' = w_2$, en omettant les primes et en posant $t = t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2$, on retrouve la famille $f_t^I(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 + z_1 . z_2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + t . z_0 . z_1)$ déjà vue dans la démonstration de 2.6. Puisque $t \neq -1, 0, 8$, le lieu singulier de f_t^I est une cubique non singulière.

II) $t_0 = 0$, t_1 et $t_2 \neq 0$. Après un changement de coordonnées on est ramené à la forme $f^{II}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + z_0 . z_1)$. Le lieu singulier a pour équation $2z_0 \,.\, (4z_1 . z_2 - z_0^2) = 0$; c'est l'intersection d'une droite et d'une conique qui lui est transverse. Aux points d'intersection, le noyau de df est de dimension un et parallèle à la droite $z_0 = 0$. Signalons que le cas t_0, t_1 et $t_2 \neq 0$, $t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2 = 8$, qui a été exclu sous I, se ramène au cas II après un changement de coordonnées convenable.

III) $t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 \neq 0$. Se ramène à

$$f^{III}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2, z_2^2 + z_0 \,.\, z_1)\,.$$

Le lieu singulier a pour équation $z_0 \,.\, z_1 \,.\, z_2 = 0$; c'est la réunion des trois droites d_0, d_1, d_2 d'équation respectivement $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$. En $d_0 \cap d_1$ ker (df) est de dimension deux; en $d_0 \cap d_2$ il est de dimen-