Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: §2. Calcul de quelques groupes de cohomologie
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Il faut montrer que pour toute section u de $\mathcal{O}(U, \pi)$, tout ensemble compact K de U et tout nombre réel ε strictement positif, il existe une section v de $\mathcal{O}(X, \pi)$ telle que

$$\| v - u \|_{L^2,K} \leqslant \varepsilon$$

la semi-norme $\| \ \|_{L^2,K}$ étant relative à des métriques hermitiennes sur Ω^1 et π. On peut supposer que le complémentaire de K n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X et qu'il existe une suite exhaustive $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de parties compactes de X ayant la même propriété, telle que K soit égal à K_0 (appendice II, lemmes 5 et 6). Posons

$$u_0 = \chi_{K_0} u \, .$$

Le lemme 2 montre qu'il existe une section u_1 de $B_{K_2}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_1 - u_0 \|_{L^2,K_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2} \, .$$

Pour tout entier j strictement positif, on construit de la même manière une section u_j de $B_{K_{j+1}}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_j - u_{j-1} \|_{L^2,K_{j-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \, .$$

Pour tout entier n, la suite $(\chi_{K_n} u_j)_{j \geqslant n}$ est une suite de Cauchy dans $B_{K_n}(X, \pi)$. On désigne par v_n sa limite. Il est clair que les sections v_n se recollent en une section v de $\mathcal{O}(X, \pi)$. Il existe un entier n tel que

$$\| v - u_n \|_{L^2,K} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

On a alors

$$\| v - u \|_{L^2,K} \leqslant \| v - u_n \|_{L^2,K} + \| u_n - u \|_{L^2,K} \leqslant \varepsilon$$

ce qui démontre l'assertion.

§ 2. Calcul de quelques groupes de cohomologie

Lemme 1. *Pour tout point x de X, il existe une fonction méromorphe h sur X, holomorphe sur $X \backslash \{x\}$ possédant un pôle simple au point x.*

Désignons par ρ un fibré en droites holomorphe sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de

Behnke-Stein qu'il existe une section holomorphe t de ρ non nulle au point x. Il suffit alors de prendre pour h la fonction $\frac{t}{s}$.

Remarque 1.

On conserve les notations du lemme 1. La fonction méromorphe h définit une application holomorphe de X dans $\mathbf{P}^1$ de rang 1 au point x, telle que

$$h^{-1}(h(x)) = \{x\}.$$

Pour tout voisinage U relativement compact de x dans X, il existe un voisinage ouvert V de x dans U vérifiant les conditions suivantes:

(1) La restriction de h à V est un isomorphisme de V sur un voisinage ouvert de $(0:1)$ dans $\mathbf{P}^1$.

(2) La trace de $h^{-1}(h(V))$ sur $\overline{U}$ est égale à V.

En effet, supposons qu'il existe un système fondamental de voisinage ouverts $(V_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de x dans U et, pour chaque entier j, un point x_j de V_j et un point y_j de $\overline{U}\backslash V_j$ tels que

$$h(x_j) = h(y_j).$$

On peut toujours supposer que la suite $(y_j)_{j\in\mathbf{N}}$ converge vers un point y de $\overline{U}$ et l'on a

$$h(y) = \lim_{j\to\infty} h(y_j) = \lim_{j\to\infty} h(x_j) = (0:1).$$

Ceci montre que l'on a

$$y = \lim_{j\to\infty} y_j = x$$

ce qui est absurde puisque h est de rang 1 au point x.

LEMME 2. *On désigne par U un ensemble ouvert relativement compact de X. Pour toute forme différentielle u de $L^2_c(U, \Omega^{0,1})$, il existe une fonction f de $H^1_{\mathrm{loc}}(U, \mathbf{C})$ telle que*

$$d''f = u.$$

Pour tout point x de U, il existe une application holomorphe h de X dans $\mathbf{P}^1$ et un voisinage ouvert V de x dans U vérifiant les conditions de la remarque 1. Par partition de l'unité, on se ramène aisément au cas où le support de u est contenu dans V. On définit alors une forme différentielle v de $L^2(\mathbf{P}^1, \Omega^{0,1})$ en posant

$$\begin{cases} v(z) = (h|_V)_*(u)(z) & \text{si } z \in h(V) \\ v(z) = 0 & \text{si } z \in \mathbf{P}^1\backslash h(V). \end{cases}$$

Comme $\mathbf{P}^1$ est de genre 0, il existe une fonction g de $H^1(\mathbf{P}^1, \mathbf{C})$ telle que

$$v = d''g .$$

Il suffit alors de poser

$$f = (g \cdot h)|_U .$$

THÉORÈME 1. *L'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ *est nul.*

Désignons par $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X dont les complémentaires n'ont pas de composante connexe relativement compacte. Soit u une forme différentielle de $L^2_{\text{loc}}(X, \Omega^{0,1})$. Pour tout entier j, on pose

$$u_j = \chi_{K_{j+1}} u .$$

Il existe une fonction f_j de $H^1_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\chi_{K_{j+1}} d'' f_j = u_j$$

(lemme 2). En particulier, la fonction

$$\chi_{K_{j+1}}(f_{j+1} - f_j)$$

appartient à $B_{K_{j+1}}(X, \mathbf{C}_X)$ et le théorème de Behnke-Stein montre qu'il existe une fonction holomorphe g_j sur X telle que

$$\| f_{j+1} - f_j - g_j \|_{L^2, K_j} \leqslant \frac{1}{2^j} ,$$

la semi-norme étant relative à une métrique hermitienne sur Ω^1. Pour tout entier n, la série

$$\sum_{j \geqslant n} \chi_{K_n}(f_{j+1} - f_j - g_j)$$

converge vers un élément de $B_{K_n}(X, \mathbf{C}_X)$ et l'on pose

$$w_n = \chi_{K_n}(f_n - g_0 - \dots - g_{n-1}) + \sum_{j \geqslant n} \chi_{K_n}(f_{j+1} - f_j - g_j) .$$

Il est clair que les fonctions w_n se recollent en une fonction w de $H^1_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ et l'on a

$$d'' w = u$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Tout fibré en droites holomorphe* ρ *sur* X *est trivial. En particulier, l'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \rho)$ *est nul.*

On sait qu'il existe une section indéfiniment dérivable s de ρ partout non nulle (chap. 0, § 2, théorème 1, corollaire). Désignons par $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement de X par des domaines de cartes de ρ et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holo-

morphe de rang 1 subordonné à ce recouvrement représentant ρ. La section s est représentée par des fonctions s_ι vérifiant les relations

$$s_\iota = g_{\iota\kappa}\, s_\kappa \,.$$

En particulier, les formes différentielles $\dfrac{d'' s_\iota}{2i\pi s_\iota}$ se recollent en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$. Le théorème 1 montre qu'il existe une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$d'' f = u$$

et un calcul élémentaire montre que la section $\exp(-2i\pi f)\, s$ de ρ est holomorphe et partout non nulle ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 1. *L'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ *s'identifie canoniquement au conoyau de l'opérateur différentiel*

$$d' : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X, \Omega^{1,0}) \,.$$

L'injection canonique de $\mathcal{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ définit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$. Cette application est surjective. En effet, toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit

$$u = u_1 + d'' f$$

avec u_1 de bidegré $(1, 0)$ et f dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Posons

$$v = u_1 - d' f \,.$$

On peut écrire

$$u = v + df \,.$$

Si de plus u est fermée, la forme différentielle v est holomorphe ce qui démontre l'assertion. Il reste à voir que le noyau de α est égal à l'image de d'. C'est immédiat.

§ 3. FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UNE COURBE HOLOMORPHE NON COMPACTE

Pour tout ensemble A de X, on pose

$$\hat{A} = \{ x \in X \mid |f(x)| \leqslant \|f\|_A \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(X) \} \,.$$

On dit que A est *holomorphiquement convexe* s'il est égal à $\hat{A}$.