Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: §5. Le corps des fonctions méromorphes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 5. Le corps des fonctions méromorphes

Lemme 1. *Soient* $x_1, \ldots, x_n$ *des points distincts de* X *et soit* r *un entier compris entre* 0 *et* n. *Il existe une fonction méromorphe* f *sur* X *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Les points $x_1, \ldots, x_n$ *appartiennent au domaine de régularité de* f.

(2) Les nombres complexes $f(x_1), \ldots, f(x_r)$ *sont deux à deux distincts et non nuls.*

(3) L'ordre de f *aux points* $x_{r+1}, \ldots, x_n$ *est égal à* 1.

Soit x_0 un point de $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour tout entier j compris entre 1 et r, on définit un diviseur u_j sur X en posant

$$\begin{cases} u_j(x_k) = 1 & \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad k \neq j \\ u_j(x_0) = 2g+1-n & \\ u_j(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in X \setminus \{x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n\}. \end{cases}$$

Désignons par π un fibré en droites holomorphes sur X et par s_j une section méromorphe de π dont le diviseur est u_j. Puisque la classe de Chern de π est égale à $2g$, il existe une section holomorphe t_j de π qui ne s'annule en aucun des points $x_1, \ldots, x_n$ (§ 4, proposition 1, corollaire 1). La fonction méromorphe définie par

$$f_j = \frac{s_j}{t_j}$$

est régulière en chacun des points $x_1, \ldots, x_n$. Elle est non nulle au point x_j et possède un zéro simple en chacun des points $x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n$. Il suffit alors de prendre pour f une combinaison linéaire convenable des fonctions $f_1, \ldots, f_r$.

Nous allons étudier le corps $\mathcal{K}(X)$ des fonctions méromorphes sur X. Toute fonction méromorphe non constante f sur X permet d'identifier le corps $\mathcal{K}(\mathbf{P}^1)$ des fonctions méromorphes sur $\mathbf{P}^1$ au sous-corps $\mathbf{C}(f)$ de $\mathcal{K}(X)$ engendré par f (chap. I, § 5, lemme 2).

Lemme 2. *Soit* f *une fonction méromorphe non constante de degré* r *sur* X. *Pour toute fonction méromorphe* g *sur* X *il existe un polynôme* p *de degré* r *dans* $\mathbf{C}(f)[T]$ *tel que* $p(g)$ *soit identiquement nulle. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le polynôme p *est irréductible.*

(2) Le discriminant de p est non nul.

(3) Il existe une valeur régulière y de f telle que g sépare les points de $f^{-1}(y)$.

On désigne par $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ les fonctions symétriques élémentaires à r indéterminées. Les fonctions $f_{\sigma_1}(g), \ldots, f_{\sigma_r}(g)$ sont méromorphes sur $\mathbf{P}^1$ (chap. I, § 4, proposition 2). Il suffit alors de poser

$$p = T^r + f_{\sigma_1}(g)\, T^{r-1} + \ldots + f_{\sigma_r}(g)\,.$$

Pour démontrer la seconde assertion, il suffit de montrer que (3) implique (1). Supposons que l'on ait

$$p = p_1 p_2$$

avec p_1 et p_2 dans $\mathbf{C}(f)[T]$. L'une au moins des fonctions méromorphes $p_1(g)$ ou $p_2(g)$ est identiquement nulle. Désignons par y une valeur régulière de f telle que g sépare les points de $f^{-1}(y)$. On peut supposer que les coefficients de p_1 et p_2 sont holomorphes au voisinage de y. Si $p_1(g)$ est identiquement nulle, le polynôme $p_1(y, T)$ a r racines distinctes, il est donc de degré r ce qui démontre l'assertion.

LEMME 3. *Soient f et g deux fonctions méromorphes sur X. On suppose que f est non constante de degré r et qu'il existe un polynôme irréductible p de degré r dans $\mathbf{C}(f)[T]$ tel que $p(g)$ soit identiquement nulle. Pour toute fonction méromorphe h sur X, il existe un polynôme q de degré au plus $r-1$ dans $\mathbf{C}(f)[T]$ tel que h soit égal à $q(g)$.*

En particulier, le corps $\mathscr{K}(X)$ est engendré par f et g.

Pour toute valeur régulière y de f telle que $f^{-1}(y)$ ne contienne ni pôles de g ni pôles de h, on pose

$$a(y, T) = p(y, T) \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{h(x)}{T - g(x)}\,.$$

Le polynôme a appartient à $\mathbf{C}(f)[T]$ (chap. I, § 4, proposition 2). Si g sépare les points de $f^{-1}(y)$, on a

$$h(x) = \frac{a(y, g(x))}{p'(y, g(x))}$$

pour tout point x de $f^{-1}(y)$, en désignant par p' le polynôme dérivé $\dfrac{\partial p}{\partial T}$ (lemme 2). Le principe du prolongement analytique montre que l'on a

$$h = \frac{a(g)}{p'(g)}\,.$$

Comme p est irréductible, il existe des polynômes a_1 et a_2 de $\mathbf{C}(f)[T]$ tels que

$$a = a_1 p' + a_2 p$$

(appendice III). On en déduit que l'on a

$$h = a_1(g)$$

et il suffit d'éliminer les termes de degré supérieur à r au moyen de la relation

$$p(g) = 0 .$$

THÉORÈME 1. *Il existe une courbe algébrique projective Y dans $\mathbf{P}^2$ et une application holomorphe π de X dans $\mathbf{P}^2$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Le couple (X, π) est une normalisation de Y.

(2) L'application π^* induit un isomorphisme de $\kappa(Y)$ sur $\mathscr{K}(X)$.

Soit f une fonction méromorphe non constante de degré r sur X et soit y une valeur régulière de f. Il existe une fonction méromorphe g sur X séparant les points de $f^{-1}(y)$ (lemme 1) et un polynôme irréductible p de degré m dans $\mathbf{C}[T_1, T_2]$ tel que $p(f, g)$ soit nulle (lemme 2). On définit un polynôme homogène irréductible de degré m dans $\mathbf{C}[T_0, T_1, T_2]$ en posant

$$\tilde{p}(T_0, T_1, T_2) = T_0^m p\left(\frac{T_1}{T_0}, \frac{T_2}{T_0}\right).$$

On désigne par Y le lieu des zéros de $\tilde{p}$ dans $\mathbf{P}^2$ et par π l'application holomorphe $(f{:}g)$ de X dans $\mathbf{P}^2$ (§ 4, remarque 1).

Pour démontrer la première assertion, il suffit de vérifier que π induit un isomorphisme de $X \setminus \pi^{-1}(A)$ sur $Y \setminus A$, en désignant par A l'ensemble des points singuliers de Y (chap. I, § 5, lemme 10). Or cette application est propre et holomorphe, elle est de degré 1 par construction. Ceci démontre l'assertion.

La seconde assertion est une conséquence immédiate du lemme 3.

COROLLAIRE 1. *Pour que deux courbes holomorphes compactes connexes X et Y soient isomorphes, il faut et il suffit que les corps $\mathscr{K}(X)$ et $\mathscr{K}(Y)$ soient isomorphes.*

C'est une conséquence immédiate de l'unicité de la normalisation d'une courbe algébrique projective.

COROLLAIRE 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe X plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$ est le lieu des zéros d'une famille de polynômes homogènes.*

Désignons par $\underline{a}$ l'idéal des polynômes de $\mathbf{C}[T_0, ..., T_n]$ qui s'annulent sur $\psi^{-1}(X)$, où ψ est la projection canonique de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n$, et par Y le lieu des zéros de $\underline{a}$ dans $\mathbf{P}^n$. Puisque $\psi^{-1}(X)$ est connexe, l'idéal $\underline{a}$ est premier. Le corps $\kappa(Y)$ des fonctions rationnelles sur Y est un sous-corps de $\mathscr{K}(X)$. Le théorème 1 montre alors que Y est une courbe algébrique de $\mathbf{P}^n$. Désignons par Y_0 l'ensemble des points réguliers de Y et posons

$$X_0 = Y_0 \cap X .$$

L'ensemble X_0 est à la fois ouvert et fermé dans Y_0. Comme ce dernier ensemble est connexe (chap. I, § 5, théorème 4), on en déduit que X est égal à Y, d'où l'assertion.

THÉORÈME 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe X se plonge dans $\mathbf{P}^3$.*

Soit f une fonction méromorphe non constante de degré r sur X. On désigne par y une valeur régulière de f, par $x_1, ..., x_r$ les points de $f^{-1}(y)$, par $x_{r+1}, ..., x_n$ les points critiques de f. Il existe une fonction méromorphe g sur X séparant les points $x_1, ..., x_r$ et possédant un zéro simple aux points $x_{r+1}, ..., x_n$ (lemme 1). Désignons par π l'application $(f:g)$ de X dans $\mathbf{P}^2$ et par Y son image. L'application π est partout de rang 1 et le couple (X, π) est une normalisation de Y (théorème 1). Soit A l'ensemble des points singuliers de Y et soit h une fonction méromorphe sur X séparant les points de $\pi^{-1}(A)$ (lemme 1). On montre aisément que l'application $(f:g:h)$ est un plongement de X dans $\mathbf{P}^3$.

§ 6. FORMES AUTOMORPHES

Pour tout automorphisme γ du disque unité $\mathbf{D}$, on définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{D}$ en posant

$$j_\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial z} .$$

Pour tout couple (γ, γ') d'automorphismes et tout point z de $\mathbf{D}$, on a

$$j_{\gamma'\gamma}(z) = j_{\gamma'}(\gamma z) j_\gamma(z) .$$