Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: §1. Lemme de Grothendieck
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CHAPITRE III

THÉORÈME DE DUALITÉ

§ 1. LEMME DE GROTHENDIECK

Pour tout couple d'entiers (j, k), on définit par récurrence un opérateur différentiel sur $\mathbf{C}$ en posant

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^{j-1} \, \partial \bar{z}^k}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^{k-1}}\right).$$

Pour tout entier m au moins égal à $j + k$ et pour tout ensemble ouvert X de $\mathbf{C}$, cet opérateur se prolonge en une application linéaire continue de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ dans $H^{m-j-k}_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ que l'on désigne encore par $\dfrac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k}$.

Pour toute fonction u de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et toute fonction h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X \frac{\partial^{j+k} u}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k} \, h \, d\mu = (-1)^{j+k} \int_X u \, \frac{\partial^{j+k} h}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k} \, d\mu .$$

En effet, pour h fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ qui coïncident sur $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$.

Remarquons d'autre part que la topologie de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ est définie par la famille de semi-normes

$$\| \quad \|_{m,K} = \max_{j+k \leq m} \left\| \frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k} \right\|_{L^2,K}$$

lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de X.

LEMME 1. *Pour toute fonction u de $H^{m+1}_c(X, \mathbf{C})$, on a*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_m = \left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\|_m .$$

Par récurrence, on se ramène immédiatement au cas où m est nul, par densité et continuité au cas où u appartient à $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$. La formule d'intégration par parties montre alors que l'on a

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2}^2 = \int_X \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} d\mu = - \int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z \, \partial \bar{z}} d\mu$$

et

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\|_{L^2}^2 = \int_X \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} d\mu = - \int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z} \, \partial z} d\mu$$

ce qui démontre l'assertion.

Remarque 1.

Il résulte en particulier du lemme 1 que l'on a

$$\| u \|_1 = \max \left(\| u \|_{L^2}, \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2} \right)$$

pour toute fonction u de $H_c^1(X, \mathbf{C})$. Par conséquent, l'application

$$\left(j, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) : H_K^1(X, \mathbf{C}) \to L_K^2(X, \mathbf{C}) \oplus L_K^2(X, \mathbf{C})$$

où j désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte K de X.

Rappelons que les fonctions k et $\bar{k}$ définies sur $\mathbf{C}^*$ par

$$k(z) = \frac{1}{\pi z} \qquad \text{et} \qquad \bar{k}(z) = \frac{1}{\pi \bar{z}}$$

appartiennent à $L_{\text{loc}}^1(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Désignons par D le disque de rayon r et de centre 0 dans $\mathbf{C}$ et par α une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(D, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} .$$

Remarquons que les fonctions $\alpha' \bar{k}$ et $\alpha'' k$ appartiennent à $\mathscr{C}_c^\infty(D, \mathbf{C})$. Par conséquent, si X et X' sont des ensembles ouverts de $\mathbf{C}$ tels que X contienne $X' + D$, le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$(\alpha k) * : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to L_{\text{loc}}^1(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\alpha \bar{k}) * : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to L_{\text{loc}}^1(X', \mathbf{C})$$

$$(\alpha'' k) * : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\alpha' \bar{k}) * : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C}) .$$

THÉORÈME 1 (Grothendieck). *Le produit de convolution induit des applications linéaires continues*

$$(\alpha k)*: L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^1_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C}) \qquad \textit{et} \qquad (\alpha \bar{k})*: L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^1_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$$

et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k)*u) = u\,|_{X'} + (\alpha'' k)*u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z}((\alpha \bar{k})*u) = u\,|_{X'} + (\alpha' k)*u$$

pour toute fonction u *de* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$.

Soit u une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. On sait que $(\alpha k)*u$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$ et l'on a

$$((\alpha k)*u)(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_X u(z)\,\alpha(\zeta - z)\,\frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_D u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

pour tout point ζ de X'. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k)*u)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(\zeta + z)\,\alpha(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

où D_ε désigne le disque de centre 0 et de rayon ε. La formule de Stokes (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire) montre que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k)*u)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\frac{dz}{z}$$
$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha''(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}.$$

On a d'autre part

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta})\,\alpha(-\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = u(\zeta)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha''(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z} = \frac{1}{\pi}\int_X u(z)\,\alpha''(\zeta - z)\,\frac{d\mu(z)}{\zeta - z}$$
$$= ((\alpha'' k)*u)(\zeta)$$

ce qui démontre la formule dans ce cas.

Désignons par λ une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(X', \mathbf{R})$ et par K un ensemble compact de X contenant l'ensemble $\operatorname{supp}(\lambda) + D$. En vertu de ce qui précède, il existe des constantes c' et c'' telles que

$$\| \lambda((\alpha k)*u) \|_{L^2} \leqslant c' \| u \|_{L^2,K} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\lambda((\alpha k)*u)) \right\|_{L^2} \leqslant c'' \| u \|_{L^2,K}$$

pour toute fonction u de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Ceci montre que l'application $(\alpha k)*$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$ est continue lorsque l'on munit la source de la topologie induite par $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ et le but de la topologie induite par $H^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ (remarque 1). Par densité et continuité, on en déduit le théorème pour l'application $(\alpha k)*$. L'assertion relative à $(\alpha \bar{k})*$ s'en déduit par conjugaison.

Remarque 2.

On montre de la même manière que le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$k* : L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \to H^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \bar{k}* : L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \to H^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$$

et que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (k*u) = u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}*u) = u$$

pour toute fonction u de $L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. En particulier, les applications induites par $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sur les germes à l'origine de fonctions continûment dérivables sont surjectives.

Soit X une courbe holomorphe et soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

L'opérateur d'' se prolonge en une application continue de $H^{m+1}_{\text{loc}}(X, \pi)$ dans $H^m_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$. Pour toute section u de $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ et toute section h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X (d''u, h) = -\int_X (u, d''h) \quad ^{1)}.$$

En effet, pour h fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ qui coïncident sur $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire et chap. I, § 2, lemme 5).

Remarque 3.

L'application

$$(j, d'') : H^1_K(X, \pi) \to L^2_K(X, \pi) \oplus L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

---

[1]) Les notations sont celles de chap. 0, § 4, exemple 1.

où j désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte K et X. C'est une conséquence immédiate des définitions et de la remarque 1.

THÉORÈME 2. *On désigne par u une section de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ et par m un entier naturel. S'il existe une section v de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ telle que*

$$\int_X (v, h) = -\int_X (u, d''h)$$

pour toute section h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, alors u appartient à $H^{m+1}_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$.

La question étant locale, on se ramène immédiatement au cas où X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$ et π le fibré produit $\mathbf{C}_X$. L'hypothèse signifie donc que la dérivée faible $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ existe et appartient à $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. Désignons par X' un ensemble ouvert relativement compact dans X, par D un disque de centre 0 tel que X contienne $X' + D$ et par α une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. Il résulte du théorème 1 que l'on a

$$u\,|_{X'} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k) * u) - (\alpha'' k) * u = (\alpha k) * \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - (\alpha'' k) * u\,.$$

Par récurrence sur m, il résulte de ce même théorème que $u\,|_{X'}$ appartient à $H^{m+1}_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$, ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 2. Si v est indéfiniment dérivable, il en est de même de u. En particulier, si v est nulle, la section u est holomorphe.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et du lemme de Sobolev (chap. II, § 2, théorème 1, corollaire).

LEMME 2. *Pour tout point x de X, il existe des voisinages ouverts U et V de x et une application linéaire continue P de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(U, \pi)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Pour toute section u de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$, la section

$$u\,|_U - (d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) L'application P s'annule sur l'ensemble des sections de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dont la restriction à V est nulle.

La question étant locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$ et que π est le fibré produit $\mathbf{C}^p_X$. On désigne par V un voisinage ouvert

de x dans X, par U un voisinage ouvert relativement compact de x dans V et par D un disque centré à l'origine tel que V contienne $U + D$. Toute section u de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ s'écrit

$$u = (u_1, \ldots, u_p)\, d\bar{z}$$

où $u_1, \ldots, u_p$ sont des fonctions de $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$. Il suffit de poser

$$P(u) = ((\alpha k) * u_1, \ldots, (\alpha k) * u_p)$$

où α est une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(D, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0 (théorème 1).

THÉORÈME 3. *Il existe une application linéaire continue P de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Pour toute section u de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$, la section

$$u - (d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) Si u est à support compact, il en est de même de $P(u)$.

Il existe deux recouvrements ouverts localement finis $(U_\iota)_{\iota \in I}$ et $(V_\iota)_{\iota \in I}$ de X, tels que U_ι soit relativement compact dans V_ι et V_ι relativement compact dans X et, pour chaque indice ι, une application linéaire continue P_ι de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\text{loc}}(U_\iota, \pi)$ vérifiant les conditions du lemme 2. On désigne par $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Pour toute section u de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ et pour tout couple (ι, κ) d'indices la section

$$v_{\kappa\iota} = P_\iota(u) - P_\kappa(u)$$

est indéfiniment dérivable sur $U_\iota \cap U_\kappa$ (théorème de regularité). On désigne par $\tilde{v}_{\kappa\iota}$ la section de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \pi)$ obtenue en prolongeant $\alpha_\kappa v_{\kappa\iota}$ par 0 et l'on pose

$$v_\iota = \sum_{\kappa \in I \setminus \{\iota\}} \tilde{v}_{\kappa\iota}$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). On a

$$v_\iota - v_\kappa = v_{\kappa\iota} = P_\iota(u) - P_\kappa(u),$$

et par conséquent les sections $P_\iota(u) - v_\iota$ se recollent en une section $P(u)$ de $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$. Il est clair que P est linéaire continue et l'on a

$$u|_{U_\iota} - (d'' \cdot P)(u)|_{U_\iota} = u|_{U_\iota} - (d'' \cdot P_\iota)(u) + d'' v_\iota$$

ce qui démontre (1).

Pour démontrer (2), il suffit de remarquer que le support de $P(u)$ est contenu dans $\bigcup_{\iota \in I'} U_\iota$

$$I' = \{ \iota \in I \mid \text{il existe } \kappa \in I \text{ tel que } U_\iota \cap U_\kappa \neq \varnothing \text{ et } V_\kappa \cap \operatorname{supp}(u) \neq \varnothing \}.$$

Ceci résulte aisément de la construction et de ce que $P_\iota(u)$ est nul chaque fois que le support de u ne rencontre pas V_ι.

On appelle *paramétrix* de d'' toute application linéaire continue P vérifiant les conditions du théorème 3.

Si P est une paramétrix de d'', le théorème de régularité montre que $P(u)$ est indéfiniment dérivable si u l'est. De même, pour toute section v de $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ la section

$$v - (P \cdot d'')(v)$$

est indéfiniment dérivable.

Il résulte d'autre part du théorème du graphe fermé que les applications linéaire

$$1 - d'' \cdot P \colon L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d'' \colon H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to \mathscr{C}^\infty(X, \pi),$$

$$1 - d'' \cdot P \colon L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d'' \colon H^1_c(X, \pi) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$$

sont continues.

PROPOSITION 1. *(1) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de* $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ *et* $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *dans* $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ *et* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *respectivement induisent des isomorphismes de* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *sur le noyau et le conoyau de l'application*

$$d'' \colon H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

(2) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ *et* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *dans* $H^1_c(X, \pi)$ *et* $L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *respectivement induisent des isomorphismes de* $\mathbf{H}^0_c(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^1_c(X, \pi)$ *sur le noyau et le conoyau de l'application*

$$d'' \colon H^1_c(X, \pi) \to L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

C'est une conséquence immédiate de l'existence d'une paramétrix.