5.2. Cas d'un système linéaire

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

correspondant aux *couches limites*; si $\theta_\varepsilon(v)$ désigne une telle correction, on est donc conduit à remplacer $y_\varepsilon(v)$ par $y(v) + \theta_\varepsilon(v)$ — ce qui conduit à un problème de contrôle optimal approché qui peut être plus simple; une question est alors évidemment d'analyser en fonction de ε l'erreur ainsi commise; nous ne développons pas ici ce point de vue, renvoyant à Lions [3], Chapitre 7;

(ii) la fonction coût contient, en général, un terme de la forme $N \| v \|^2$ où $\| v \|$ est une norme sur l'espace des contrôles et où N est un paramètre > 0 d'autant plus petit que v est « bon marché ». Cela conduit aux problèmes de contrôle où $N \to 0$; ce sont, comme on va voir, des problèmes de perturbations singulières.

5.2. *Cas d'un système linéaire*

Commençons par un exemple très simple. Dans un ouvert Ω borné de $\mathbf{R}^n$ de frontière régulière Γ, on considère un système dont l'état $y = y(x, v) = y(v)$ est donné par:

$$A\, y(v) = f \text{ dans } \Omega, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma \tag{5.2}$$

où A est un opérateur elliptique du 2e ordre, $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ la dérivée conormale associée à A, et où f (resp. v) est pris dans $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\Gamma)$).

On prendra par exemple A donné par:

$$A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + a_0\,\varphi, \tag{5.3}$$

où les a_{ij} vérifient (2.3) et où $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geqslant \alpha_0 > 0$ p.p.

Le problème (5.1) (5.2) admet une solution unique:

$$y(v) \in H^1(\Omega). \tag{5.4}$$

La *fonction coût* est donnée par:

$$J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |\, y(v) - z_d \,|^2\, d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma v^2\, d\Gamma, \tag{5.5}$$

où z_d est donné dans $L^2(\Gamma)$ et où $\varepsilon > 0$ « petit ».

Soit par ailleurs:

(5.6) $\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble fermé convexe non vide de $L^2(\Gamma)$.

Le problème de contrôle optimal:

(5.7) $$\inf J_\varepsilon(v)\ ,\ v \in \mathcal{U}_{ad},$$

admet une solution unique, soit u_ε.

Notre objet est maintenant l'étude du comportement de u_ε *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

Si l'on pose:

$$y(u_\varepsilon) = y_\varepsilon$$

le contrôle optimal u_ε est caractérisé par:

(5.8) $$\int_\Gamma (y_\varepsilon - z_d)(y(v) - y_\varepsilon)\, d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma u_\varepsilon (v - u_\varepsilon)\, d\Gamma \geqslant 0,\ \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

On pose:

(5.9) $$(y(v) - y(\mathrm{o}))_\Gamma = \varphi\ ,\ (y(u_\varepsilon) - y(\mathrm{o}))_\Gamma = \varphi_\varepsilon.$$

Alors v est donné à partir de φ de la façon suivante: on résout

(5.10) $$A\phi = 0 \text{ dans } \Omega,\ \ \phi\,|_\Gamma = -\varphi$$

et l'on pose:

(5.11) $$\mathcal{A}\varphi = \left.\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|_\Gamma .$$

Alors:

(5.12) $$v = \mathcal{A}\varphi.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est un *isomorphisme* de $H^s(\Gamma) \to H^{s-1}(\Gamma)$, $\forall\, s \in \mathbf{R}$ (Cf. Lions-Magenes [1], Chapitres 1 et 2).

L'opérateur inverse $\mathcal{A}^{-1}$ est donné comme suit: on résout

(5.13) $$A w = 0\ ,\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma,$$

et alors:

(5.14) $$w\,|_\Gamma = \mathcal{A}^{-1} v.$$

On introduit:

(5.15) $\mathcal{K} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{U}_{ad})$ = ensemble convexe fermé (non vide) de $H^1(\Gamma)$.

Avec ces notations, le problème (5.8) *équivaut* à:

$$(5.16)\quad \left| \begin{array}{l} \int_\Gamma (\varphi_\varepsilon - (z_d - y(\mathrm{o})))(\varphi - \varphi_\varepsilon)\, d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma \mathscr{A}\varphi_\varepsilon\, \mathscr{A}(\varphi - \varphi_\varepsilon)\, d\Gamma \geqslant 0, \\ \qquad\qquad \varphi_\varepsilon \in \mathscr{K}\ ,\ \forall\ \varphi \in \mathscr{K}. \end{array} \right.$$

Posons:

$$(5.17)\qquad g = z_d - y(0).$$

Alors (5.16) équivaut à:

$$(5.18)\qquad \varepsilon \int_\Gamma \mathscr{A}\varphi_\varepsilon\, \mathscr{A}(\varphi - \varphi_\varepsilon)\, d\Gamma + \int_\Gamma \varphi_\varepsilon (\varphi - \varphi_\varepsilon)\, d\Gamma \geqslant \int_\Gamma g(\varphi - \varphi_\varepsilon)\, d\Gamma,\ \forall\ \varphi \in \mathscr{K}.$$

C'est un problème de perturbations singulières pour des inéquations variationnelles (Cf. D. Huet [1], J. L. Lions [4] [5]). Le résultat est alors le suivant: on introduit

$$(5.19)\qquad \overline{\mathscr{K}} = \text{adhérence de } \mathscr{K} \text{ dans } L^2(\Gamma),$$

et soit φ_0 la solution dans $\overline{\mathscr{K}}$ de:

$$(5.20)\qquad \int_\Gamma \varphi_0 (\varphi - \varphi_0)\, d\Gamma \geqslant \int_\Gamma g(\varphi - \varphi_0)\, d\Gamma,\ \forall\ \varphi \in \overline{\mathscr{K}},$$

i.e.

$$(5.21)\qquad \varphi_0 = \text{Proj.}_{\overline{\mathscr{K}}}\, g = \text{projection sur } \overline{\mathscr{K}} \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ de g.}$$

On a alors:

$$(5.22)\qquad \varphi_\varepsilon \to \varphi_0 \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Par conséquent:

THÉORÈME 5.1. *Lorsque* $\varepsilon \to 0$, *on a:*

$$(5.23)\qquad y_\varepsilon \Big|_\Gamma = y(u_\varepsilon)\Big|_\Gamma \to y(\mathrm{o}) + \text{Proj.}_{\overline{\mathscr{K}}}(z_d - y(\mathrm{o})) \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

On en déduit que:

$$(5.24)\qquad u_\varepsilon = \mathscr{A}\varphi_\varepsilon \to u_0 = \mathscr{A}\varphi_0 \text{ dans } H^{-1}(\Gamma).$$

En général φ_0 *n'est pas* dans $H^1(\Gamma)$ de sorte que $\mathscr{A}\varphi_0$ *n'est pas* dans $L^2(\Gamma)$ de sorte que le résultat (5.24) *ne peut pas en général être amélioré.*

Remarque 5.1.

Si $\varphi_0 \in H^1(\Gamma)$ (et donc à $\mathscr{K}$) alors $\varphi_\varepsilon \to \varphi_0$ dans $H^1(\Gamma)$ et dans ce cas $u_\varepsilon \to u_0$ dans $L^2(\Gamma)$.

Exemple 5.1.

Prenons le cas « sans contraintes »

$$\mathscr{U}_{ad} = L^2(\Gamma). \tag{5.25}$$

Alors $\mathscr{A}^{-1}\mathscr{U}_{ad} = H^1(\Gamma)$ et $\overline{\mathscr{K}} = L^2(\Gamma)$. Donc $\varphi_0 = z_d - y(o)$ et par conséquent:

$$y(u_\varepsilon)\Big|_\Gamma \to z_d \text{ dans } L^2(\Gamma). \tag{5.26}$$

Pour obtenir u_0, on résout:

$$A\phi_0 = 0\,,\ \phi_0 = z_d \text{ sur } \Gamma \tag{5.27}$$

et alors:

$$u_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu}. \tag{5.28}$$

Exemple 5.2.

Soit $\mathscr{L}$ une variété régulière de dimension $(n-2)$ contenue dans Γ. Supposons que:

$$\mathscr{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma)\,,\ \varphi = 0 \text{ sur } \mathscr{L}\}. \tag{5.29}$$

Alors $\overline{\mathscr{K}} = L^2(\Gamma)$. On a alors:

$$\varphi_\varepsilon \to g \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Si l'on fait *l'hypothèse* que $g \in H^1(\Gamma)$, on peut utiliser Lions [4] [5] pour définir des *correcteurs* θ_ε par:

$$\left|\begin{array}{l} \theta_\varepsilon + g \in \mathscr{K}, \\[2ex] \varepsilon \displaystyle\int_\Gamma \mathscr{A}\,\theta_\varepsilon\,\mathscr{A}\,(\varphi-\theta_\varepsilon)\,d\Gamma + \int_\Gamma \theta_\varepsilon(\varphi-\theta_\varepsilon)\,d\Gamma \geqslant \\[2ex] \qquad\qquad \displaystyle\int_\Gamma (\varepsilon\, g_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2} g_{\varepsilon 2})(\varphi-\theta_\varepsilon)\,d\Gamma \\[2ex] \forall\, \varphi \text{ avec } \varphi + g \in \mathscr{K}, \end{array}\right. \tag{5.30}$$

où

$$\left| \int_\Gamma g_{\varepsilon 1} \varphi \, d\Gamma \right| \leqslant c \, || \varphi ||_{H^1(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{K},$$

$$\left| \int_\Gamma g_{\varepsilon 1} \varphi \, d\Gamma \right| \leqslant c \, || \varphi ||_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{K}.$$

On a alors:

$$\varphi_\varepsilon - (g + \theta_\varepsilon) \to 0 \text{ dans } H^1(\Gamma). \tag{5.31}$$

Le calcul de θ_ε *est un calcul de couche limite pour un opérateur pseudo-différentiel* ($\mathscr{A}$). Nous renvoyons pour cela à Demidov [1], Pokrovski [1].

Comme *variante* on peut prendre:

$$\mathscr{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma), \varphi = y(o) \text{ sur } \mathscr{L}\}. \tag{5.29 bis}$$

Cela signifie que $\mathscr{U}_{ad}$ est l'ensemble des v tels que:

$$y(v) = 0 \text{ sur } \mathscr{L}. \tag{5.32}$$

Donc $\mathscr{U}_{ad}$ est définie à partir des contraintes sur l'état, une situation fréquente dans les applications.

Evidemment, on a encore ici un phénomène de couche limite au voisinage de $\mathscr{L}$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Remarque 5.2.

On trouvera dans Lions [4] [5] l'analyse d'autres situations du même type (mais plus délicates).

5.3. *Cas d'un système non linéaire*

On considère maintenant le système dont l'état est donné par:

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta y + \beta(y) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \tag{5.33}$$

où $\lambda \to \beta(\lambda)$ est une fonction continue strictement croissante de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, nulle à l'origine. Dans (5.33), on suppose que $v \in L^2(\Gamma)$; le problème (5.33) admet une solution unique telle que: