4. Equations d'état non linéaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

d'où, en tenant compte de la 2e équation (3.37):

$$- \int_{\Omega} h(x)\,\psi^-(x, s)\,dx + \int_{\Omega \times]s,T[} (\Lambda\psi)(\Lambda\psi^-)\,dx\,dt$$
$$- \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s,T[} (\psi^-)^2\,dx\,dt = 0$$

d'où:

$$(3.54) \quad \int_{\Omega} h(x)\,\psi^-(x, s)\,dx + \int_{\Omega \times]s,T[} (\Lambda\psi^-)^2\,dx\,dt$$
$$+ \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s,T[} (\psi^-)^2\,dx\,dt = 0.$$

Comme $h \geqslant 0$, tous les termes sont positifs, donc $\psi^- = 0$.

Remarque 3.6.

On rencontre d'autres systèmes du type (3.51) pour des opérateurs paraboliques (Cf. Lions [1] [2]). D'autres systèmes, encore du même type, ont été obtenus à propos de problèmes stochastiques par Bismut [1].

Des études *directes* de ces systèmes (et d'autres, n'entrant pas, apparemment, dans le cadre de la théorie du contrôle) ont été faites par Da Prato et Temam, les résultats les plus complets étant obtenus, à partir de méthodes itératives nouvelles, par L. Tartar [1].

Remarque 3.7.

Le noyau P dépend du paramètre N : $P = P_N$. On montre (Cf. Lions [3]) que $P_N(x, \xi, t)$ *décroît* (p.p.) lorsque N *décroît* et que lorsque $N \to 0$, $P_N(x, \xi, t) \to 0$, au sens:

$$\forall\, h \in L^2(\Omega)\,,\ \forall\, t \in [0, T]\,,\ \iint_{\Omega \times \Omega} P_N(x, \xi, t)\,h(x)\,h(\xi)\,dx\,d\xi \to 0.$$

4. Equations d'état non linéaires

4.1. *Cas différentiable*

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où l'*équation d'état* du système était *linéaire*. On rencontre dans les applications de nombreuses situations (c'est même, en fait, la situation habituelle!) où l'équation d'état est *non linéaire*.

On peut distinguer deux cas, selon que l'application $v \to y(v)$ est, ou non, différentiable.

Donnons un exemple de problème intervenant en biochimie [1]; l'état (qui représente une concentration) est donné par:

$$(4.1) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \dfrac{y}{1+y} = f\,,\ x \in]0, 1[,\ t \in]0, T[, \\ \\ \sigma = \text{constante} > 0, \end{array} \right.$$

$$(4.2) \qquad y(x, o) = y_0(x)\,,\ x \in]0, 1[$$

$$(4.3) \qquad -\frac{\partial y}{\partial x}(o, t) = v(t)\,,\ \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = 0\,,\ t \in]0, T[.$$

Les données f et y_0 et le contrôle v sont $\geqslant 0$.

On vérifie sans peine (Cf. les détails dans Kernevez [1]) que ce problème admet une *solution unique*, vérifiant:

$$(4.4) \qquad y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(Q),\ Q = \Omega \times]0, T[,\ \Omega =]0, 1[,$$

$$(4.5) \qquad y \geqslant 0.$$

On peut, par exemple, commencer par résoudre le problème:

$$(4.6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\varphi}{1 + |\varphi|} = f,$$

avec les conditions (4.2) (4.3) inchangées, puis l'on vérifie que la solution φ de (4.6) (4.2) (4.3) est $\geqslant 0$, donc $\varphi = y$.

La solution de (4.1) (4.2) (4.3) étant notée $y(v)$, on considère la *fonction coût*:

$$(4.7) \qquad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2\, dx\, dt + N \int_0^T v^2\, dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$.

Il est facile de voir que le problème:

$$(4.8) \qquad \inf J(v)\,,\ v \in \mathcal{U}_{ad}$$

---

[1]) On trouvera dans les travaux de Kernevez et Thomas (Cf. la bibliographie) de très nombreux autres problèmes de contrôle en biochimie; on donne ici l'un des exemples les plus simples. Cf. aussi Brauner et Penel [1].

où

(4.9) $\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble convexe fermé non vide de $L^2(0, T)$, contenu dans l'ensemble des fonctions $\geqslant 0$ p.p. sur $(0, T)$

admet une solution (au moins).

Pour obtenir des conditions *nécessaires* d'optimalité, on utilise alors le fait que la fonction $v \to y(v)$ est *différentiable* de $\{L^2(0, T), v \geqslant 0\}$ dans $L^2(Q)$. Si l'on pose:

$$\bar{y} = \frac{d}{d\lambda} y(u + \lambda v) \big|_{\lambda = 0} \tag{4.10}$$

on vérifie que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \sigma \dfrac{\bar{y}}{1 + y} - \sigma \dfrac{\bar{y}\, y}{(1 + y)^2} = 0, \\ \bar{y}(x, o) = 0, \\ -\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x}(o, t) = v(t), \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial x}(1, t) = 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

où $y = y(u)$.

On introduit alors l'état adjoint et l'on obtient les conditions d'optimalité par des intégrations par parties (Cf. Kernevez [1], Lions [2]).

Remarque 4.1.

La fonction $v \to J(v)$ n'a pas de raison d'être convexe, et il n'y a donc pas de raison d'avoir unicité de la solution. Il serait intéressant d'étudier le *nombre* éventuel des solutions (minima globaux ou locaux). Nous rencontrerons encore des questions de ce type au n° 5 (Cf. par exemple Remarque 5.4.).

Remarque 4.2.

On trouvera d'autres exemples, relatifs à des problèmes de conduite de chauffe d'un four, dans J. P. Yvon [1].

4.2. *Cas non différentiable*

Voici un exemple de problème de contrôle intervenant également en biochimie. L'état est donné par l'équation:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \frac{y}{1+y} = f + v \ , \ x \in]0, 1[\ , \ t \in]0, T[, \tag{4.12}$$

donc équation analogue à (4.1), avec cette fois *le contrôle distribué* $v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad}$, où

(4.13) $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$ = ensemble fermé convexe non vide de $L^2(Q)$, contenu dans les fonctions p.p. $\geqslant 0$ dans Q.

La *condition initiale* est identique à (4.2). Les *conditions aux limites* sont les suivantes: soit $h \geqslant 0$ donné; alors c étant une constante > 0,

$$-\frac{\partial y}{\partial x}(o, t) = -c(y-h)^+\Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = -c(y-h)^+\Big|_{x=1}. \tag{4.14}$$

On vérifie encore que le problème (4.12) (4.2) (4.14) *admet une solution unique*, soit $y = y(v)$. Si la fonction coût est encore donnée par (4.7), le problème:

$$\text{Inf } J(v) \ , \ v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad} \tag{4.15}$$

admet encore une solution (au moins), soit u.

Mais la fonction $\lambda \to \lambda^+$ n'étant pas différentiable à l'origine, l'application $v \to y(v)$ de $L^2(Q) \to L^2(Q)$ n'est plus différentiable, et l'obtention de conditions d'optimalité semble une question ouverte.

Remarque 4.3.

Du point de vue *numérique* (Cf. Yvon [1]) on introduit une fonction $\lambda \to \gamma(\lambda)$ *approximation différentiable* de $\lambda \to \lambda^+$ et l'on remplace (4.14) par:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial y}{\partial x}(o, t) &= -c\,\gamma(y(o, t) - h), \\ \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) &= c\,\gamma(y(1, t) - h). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Soit $y^\gamma(v)$ le nouvel état, correspondant à (4.16). On montre que $y^\gamma(v) \to y(v)$ dans $L^2(Q)$ lorsque γ converge vers λ^+ (avec $\gamma(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$) et l'on résout le problème de contrôle correspondant à $y^\gamma(v)$, la fonction $v \to y^\gamma(v)$ étant cette fois différentiable.

Remarque 4.4.

La situation décrite à la Remarque 4.3. précédente est typique des *inéquations variationnelles* intervenant en Physique et en Mécanique (Cf. Duvaut-Lions [1]) et pour la résolution numérique desquelles on emploie constamment des processus de régularisation analogues à ceux de la Remarque précédente (Cf. Glowinski, Lions, Tremolières [1] et la bibliographie de ce livre).

Remarque 4.5.

Dans tous les problèmes considérés jusqu'ici, mais en particulier *dans le cas des problèmes multiphases*, on peut avoir à considérer des fonctions coût de la forme:

$$J(v) = \int_{E(v)} |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt \tag{4.17}$$

où $E(v)$ est un ensemble géométrique défini à partir de $y(v)$ (par exemple $E(v)$ peut être l'ensemble où $y(v) > 0$).

De nombreux problèmes restent à résoudre dans cette direction. Un exemple, relatif aux équations de Stefan, est résolu dans Vasiliev [1].

5. Phénomènes de perturbations singulières

5.1. *Orientations*

Des phénomènes de perturbations singulières apparaissent dans la théorie du contrôle optimal pour deux raisons:

(i) l'état du système peut être décrit par une équation (ou un ensemble d'équations) contenant un petit paramètre ε, soit $y_\varepsilon(v)$ cet état, correspondant à un contrôle v; alors la théorie des perturbations (*singulières* si, comme c'est le cas le plus important, ε apparaît dans des dérivées d'ordre supérieur) permet de « remplacer » $y_\varepsilon(v)$ par un « état approché » plus simple $y(v)$ correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$ et avec des « *corrections* »