3.4. Cas sans contrainte — Equation intégro-différentielle de Riccati

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$(3.33)\quad \left| \begin{aligned} X &= -N\big(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)\,,\,(\varphi_1 - \varphi_2)^-\big)_Q \\ &= N\int_Q \big(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)\big)(\varphi_1 - \varphi_2)\,dx\,dt \\ &\quad \varphi_1 \leqslant \varphi_2. \end{aligned} \right.$$

Mais on vérifie que $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0$ p.p. d'où

$$(3.34)\qquad X \geqslant 0.$$

D'après (3.26), le 2e membre de (3.32) est $\leqslant 0$, ce qui, avec (3.34) donne:

$$\Lambda q^+ = 0.$$

Comme $q^+ = 0$ sur Σ_+ et $q^+(x, T) = 0$, on a $q^+ = 0$ d'où (3.27).

3.4. *Cas sans contrainte — Equation intégro-différentielle de Riccati*

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « *sans contraintes* », i.e.

$$(3.35)\qquad \mathscr{U}_{ad} = L^2(Q).$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$(3.36)\quad \left| \begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} = f, \\ &-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ &y = 0 \text{ sur } \Sigma_-\,,\ p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ &y(x, o) = y_0(x)\,,\ p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega; \end{aligned} \right.$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour $t = 0$ et $t = T$. Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour $s < t < T$ où s est fixé (quelconque) dans $]0, T[$:

$$(3.37)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi + \dfrac{1}{N}\psi = 0, \\[2ex] -\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + A^*\psi - \varphi = 0, \\[2ex] \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_- \; X]s, T[\,,\ \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \; X]s, T[\\[2ex] \varphi(x,s) = h(x)\,,\ \psi(x,T) = 0 \text{ sur } \Omega \end{array}\right.$$

qui admet une solution unique; en fait il s'agit là du système d'optimalité pour le problème suivant: l'état est donné par $\bar{y}(v)$ solution de:

$$(3.38)\qquad \frac{\partial\bar{y}}{\partial t} + A\bar{y} = v\,,\ \bar{y}(s) = h\,,\ t > s$$

et la fonction coût par:

$$(3.39)\qquad \int_s^T |\bar{y}(v)|^2\,dt + N\int_s^T |v|^2\,dt = \mathscr{J}_s^h(v)$$

(où $|v|^2 = \int_\Omega v(x)^2\,dx$), et on minimise $\mathscr{J}_s^h(v)$ sans contraintes.

Donc le système (3.37) admet une solution unique, donc définit de manière unique $\psi(s) \in L^2(\Omega)$.

L'application $h \to \psi(s)$ est linéaire continu de $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, donc:

$$(3.40)\qquad \psi(s) = P(s)\,h\,,\ P(s) \in \mathscr{L}(H;H)\,,\ H = L^2(\Omega).$$

On vérifie alors que l'on a l'identité (Cf. Lions, loc. cit.)

$$(3.41)\qquad p(t) = P(t)\,y(t) + r(t).$$

On peut calculer P et r par un *calcul d'identification* (il faut vérifier que les calculs effectués ci-après de façon formelle sont loisibles). On obtient, (en posant de manière générale $\dfrac{dg}{dt} = g'$),

$$(3.42)\qquad -P'y - Py' - r' + A^*Py + A^*r - y = -z_d,$$

et en remplaçant dans (3.42) y' par sa valeur tirée de la première équation (3.36), on a finalement:

$$(3.43)\qquad -P'y + P\left(Ay + \frac{p}{N} - f\right) - r' + A^*Py + A^*r - y = -z_d.$$

On peut encore remplacer dans (3.43) p par sa valeur (3.41), d'où:

$$-P'y + PAy + A^*Py + \frac{1}{N}PPy - y - r' + A^*r + \frac{1}{N}Pr - Pf = -z_d$$

et cela est une identité en y, d'où:

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + PA + A^*P + \frac{1}{N}P \circ P = I \tag{3.44}$$

et

$$-\frac{\partial r}{\partial t} + A^*r + \frac{1}{N}Pr = Pf - z_d. \tag{3.45}$$

Comme $p(T) = 0$, on doit avoir:

$$P(T) = 0\,,\ r(T) = 0. \tag{3.46}$$

On vérifie enfin à partir de (3.37) que:

$$P(t)^* = P(t) \text{ dans } \mathscr{L}(H; H) \tag{3.47}$$

et que

$$P(t) \geqslant 0 \text{ dans } \mathscr{L}(H; H). \tag{3.48}$$

Plus précisément, on vérifie que:

$$(P(s)\,h, h) = \inf_v \mathscr{J}_s^h(v). \tag{3.49}$$

On note encore que:

$$P(t)\,h \in D(A^*)\,,\ r(t) \in D(A^*). \tag{3.50}$$

D'après le théorème des noyaux de L. Schwartz [1], on peut représenter (de façon unique), l'opérateur $P(t)$ par un *noyau* $P(x, \xi, t)$ et on peut résumer les informations ci-dessus dans l'ensemble des conditions suivantes:

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial P}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_i(x)\,P(x, \xi, t)\big) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\big(a_i(\xi)\,P(x, \xi, t)\big) \\[2ex] + \dfrac{1}{N}\displaystyle\int_\Omega P(x, \xi, t)\,P(\xi, \xi, t)\,d\xi = \delta(x - \xi) \text{ dans } \Omega \times \Omega \times]0, T[, \\[2ex] P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t), \end{array}\right. \tag{3.51}$$

$$\left|\begin{array}{l} P(x,\xi,t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_+ \,,\ \xi \in \Omega \,,\ t \in]0,T[, \\ P(x,\xi,T) = 0 \text{ sur } \Omega \times \Omega, \\ \forall\, h \in L^2(\Omega)\,,\ \int_\Omega P(x,\xi,t)\,h(\xi)\,d\xi \in L^2(\Omega) \text{ et} \\ \iint_{\Omega\times\Omega} P(x,\xi,t)\,h(x)\,h(\xi)\,dxd\xi \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Ce problème admet une solution unique. La fonction $r = r(x,t)$ est ensuite déterminée par:

$$(3.52)\quad \left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial r}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x)\,r(x,t)) + \frac{1}{N}\int_\Omega P(x,\xi,t)\,r(\xi)\,d\xi \\ = \displaystyle\int_\Omega P(x,\xi,t) f(\xi,t)\,d\xi - z_d(x,t), \\ r(x,t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_+ \,,\ t \in]0,T[, \\ r(x,T) = 0. \end{array}\right.$$

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 3.2. *La solution $P(x,\xi,t)$ de* (3.51) *vérifie :*

$$(3.53)\qquad P(x,\xi,t) \geqslant 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times \Omega.$$

Démonstration

Considérons le système (3.37) avec h donnée $\geqslant 0$ p.p. dans Ω.

On aura (3.53) si l'on montre que $\psi \geqslant 0$ p.p. dans $\Omega \times]s,T[$. Pour cela, on multiplie la 1re équation (3.37) par ψ^-, il vient:

$$\int_{\Omega\times]s,T[} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi\right)\psi^-\,dx\,dt - \frac{1}{N}\int_{\Omega\times]s,T[} (\psi^-)^2\,dx\,dt = 0;$$

intégrant par parties et posant $\Lambda = -\dfrac{\partial}{\partial t} + A^*$, il vient:

$$-\int_\Omega h(x)\,\psi^-(x,s)\,dx + \int_{\Omega\times]s,T[} \varphi\,(\Lambda\psi^-)\,dx\,dt - \frac{1}{N}\int_{\Omega\times]s,T[} (\psi^-)^2\,dxdt = 0$$

d'où, en tenant compte de la 2e équation (3.37):

$$- \int_{\Omega} h(x)\,\psi^-(x, s)\,dx + \int_{\Omega \times]s,T[} (\Lambda\psi)(\Lambda\psi^-)\,dx\,dt$$
$$- \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s,T[} (\psi^-)^2\,dx\,dt = 0$$

d'où:

$$(3.54) \quad \int_{\Omega} h(x)\,\psi^-(x, s)\,dx + \int_{\Omega \times]s,T[} (\Lambda\psi^-)^2\,dx\,dt$$
$$+ \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s,T[} (\psi^-)^2\,dx\,dt = 0.$$

Comme $h \geqslant 0$, tous les termes sont positifs, donc $\psi^- = 0$.

Remarque 3.6.

On rencontre d'autres systèmes du type (3.51) pour des opérateurs paraboliques (Cf. Lions [1] [2]). D'autres systèmes, encore du même type, ont été obtenus à propos de problèmes stochastiques par Bismut [1].

Des études *directes* de ces systèmes (et d'autres, n'entrant pas, apparemment, dans le cadre de la théorie du contrôle) ont été faites par Da Prato et Temam, les résultats les plus complets étant obtenus, à partir de méthodes itératives nouvelles, par L. Tartar [1].

Remarque 3.7.

Le noyau P dépend du paramètre N : $P = P_N$. On montre (Cf. Lions [3]) que $P_N(x, \xi, t)$ *décroît* (p.p.) lorsque N *décroît* et que lorsque $N \to 0$, $P_N(x, \xi, t) \to 0$, au sens:

$$\forall\, h \in L^2(\Omega)\,,\ \forall\, t \in [0, T]\,,\ \iint_{\Omega \times \Omega} P_N(x, \xi, t)\,h(x)\,h(\xi)\,dx\,d\xi \to 0.$$

4. Equations d'état non linéaires

4.1. *Cas différentiable*

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où l'*équation d'état* du système était *linéaire*. On rencontre dans les applications de nombreuses situations (c'est même, en fait, la situation habituelle!) où l'équation d'état est *non linéaire*.