§3. Généralisations et compléments.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comme $\sum_{\mathbf{u}\in U} \sigma(j(\mathbf{u})) = \operatorname{ord}\left(\prod_{\mathbf{u}\in U} c_{j(\mathbf{u})}\right)$ (lemme 2 et première formule (1.3.1)), cette dernière inégalité peut s'écrire, après division par $p^{f-1} + \ldots + p + 1$,

$$f(p-1)(s/d)^* \leqslant \operatorname{ord}\left(\prod_{\mathbf{u}\in U} c_{j(\mathbf{u})}\right);$$

compte tenu de (1.3.1) et (1.3.4), on a alors

$$f(p-1)(n-s+(s/d)^*) \leqslant \operatorname{ord}\left(q^{n-s}\prod_{\mathbf{u}\in U} c_{j(\mathbf{u})}\right). \tag{2.4.2}$$

Mais le symbole ord est relatif à *n'importe quel* idéal premier $\mathfrak{P}$ de B divisant p, et on a (sect. 1.1, (1.1.3)) $pB = \prod_{\mathfrak{P}|p} \mathfrak{P}^{p-1}$, donc, puisque $q = p^f$, $qB = \prod_{\mathfrak{P}|p} \mathfrak{P}^{f(p-1)}$; ainsi, étant donné (2.4.2), il suffit, pour prouver le lemme 3 (donc le théorème 1), d'établir la propriété suivante:

(2.4.3) *Pour tout entier s tel que $0 \leqslant s \leqslant n$, on a l'inégalité*

$$n - s + (s/d)^* \geqslant b + 1 .$$

Démontrons (2.4.3); il est clair que pour tout entier positif t, on a $t \geqslant ((s+t)/d)^* - (s/d)^*$: car, pour $t = 0$, les deux membres sont égaux, et d'autre part le membre de droite, considéré comme fonction de t, croît « moins vite » que t; dans cette inégalité, faisons alors $t = n - s$; il vient

$$n - s + (s/d)^* \geqslant (n/d)^* ;$$

mais par définition même $(n/d)^* = b + 1$: ce qui prouve (2.4.3) et achève la démonstration du théorème 1.

§ 3. *Généralisations et compléments.*

3.1. Le théorème 1 s'étend sans difficulté au cas d'un système d'équations:

THÉORÈME 2. — *Soit $F_1, \ldots, F_s$ une famille de s polynômes de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_s$, à n variables et à coefficients dans k; posons $d = d_1 + \ldots + d_s$, et soit b le plus grand entier strictement inférieur à n/d. Si alors N désigne le nombre de solutions dans k^n du système d'équations*

$$F_1 = 0, \ldots, F_s = 0 , \tag{3.1.1}$$

N est divisible par q^b.

Démonstration. — On se sert du lemme combinatoire suivant:

LEMME 1. — *Soit $V_1, ..., V_s$ une famille de s ensembles finis. Posons $V = \bigcap_{i \leq j \leq s} V_j$, et, pour toute partie R de $S = \{1, ..., s\}$, posons $U_R = \bigcup_{j \in R} V_j$ (pour $R = \emptyset$, $U_R = \emptyset$). On a alors*

$$\text{card}(V) = \sum_{R \subset S} (-1)^{\text{card}(R)-1} \text{card}(U_R). \tag{3.1.2}$$

Ce lemme se prouve facilement par récurrence sur s. Appliquons-le à la démonstration du théorème 2: pour tout $j \in S = \{1, ..., s\}$, soit V_j l'ensemble des zéros dans k^n de l'unique polynôme F_j; avec les notations du lemme, V est alors l'ensemble des solutions dans k^n du système (3.1.1), on a $N = \text{card}(V)$, et (3.1.2) montre qu'il suffit de prouver que, pour chaque $R \subset S$, card (U_R) est divisible par q^b. Si $R = \emptyset$, $U_R = \emptyset$, card $(U_R) = 0$, et il n'y a rien à démontrer; sinon, posons $F_R = \prod_{j \in R} F_j$: U_R est alors l'ensemble des zéros dans k^n du polynôme F_R, et si b_R est le plus grand entier strictement inférieur à $n/\deg(F_R)$, le théorème 1 montre que card (U_R) est divisible par q^{b_R}; mais $\deg(F_R) = \sum_{j \in R} \deg(F_j) \leqslant \sum_{j \in S} \deg(F_j) = d$, d'où $n/d \leqslant n/\deg(F_R)$ et $b \leqslant b_R$; card (U_R), divisible par q^{b_R}, est divisible a fortiori par q^b, C.Q.F.D.

3.2. Le théorème 1, pour *une* équation, est « le meilleur possible » au sens suivant: *quels que soient n et d, il existe F, de degré d, à n variables et à coefficients dans k, tel que (avec les notations du théorème 1) q^b soit la plus haute puissance de q divisant N.* (Prendre par exemple pour F le polynôme $G_{n,d} = X_1 \dots X_d + X_{d+1} \dots X_{2d} + \dots + X_{(b-1)d+1} \dots X_{bd} + X_{bd+1} \dots X_n$; pour ce polynôme, le nombre N peut être déterminé explicitement à l'aide du théorème 6 du chapitre 4: on laisse au lecteur le soin de faire les calculs en détail). En revanche, le théorème 2, pour un système de s équations, peut être amélioré; en fait, on a le résultat suivant, dû à Katz (1971):

THÉORÈME 3. — *Mêmes données et notations que dans le théorème 2. Si $\delta = \sup_{1 \leq j \leq s} d_j$, et si b_1 désigne le plus grand entier supérieur ou égal à $(n-d)/\delta$, alors N est divisible par q^{b_1}.*

Ce théorème 3 (qui, pour $s = 1$, coïncide évidemment avec le théorème 1) est lui-même « le meilleur possible »; en fait, on peut montrer (en utilisant des polynômes du type $G_{n,d}$ ci-dessus et des polynômes normiques, et en raisonnant comme au chapitre 4, section 4.3) que, *quels que soient n, s, et $d_1, ..., d_s$, il existe une famille $F_1, ..., F_s$ satisfaisant aux hypothèses des*

théorèmes 2 *et* 3 *et telle que N soit égal exactement à* q^{b_1}. Pour la construction d'une telle famille de polynômes, et pour la démonstration du théorème 3, voir Katz (1971) (respectivement § 4 et § 3); voir également les Notes en fin de chapitre.

3.3. Pour des équations *de forme particulière*, le théorème 1 peut dans certains cas être amélioré. Ainsi, en combinant le théorème 1 du chapitre 6 avec les « relations de Stickelberger » (prop. 1), on obtient sans difficulté le résultat suivant:

THÉORÈME 4. — *Soit* $F = a_1 X_1^{d_1} + \ldots + a_n X_n^{d_n}$ *un polynôme diagonal à coefficients dans le corps premier* $k = \mathbf{F}_p$. *Pour* $i = 1, \ldots, n$, *posons* $\delta_i = (p-1, d_i)$, *et soit* b_2 *le plus grand entier strictement inférieur à* $1/\delta_1 + \ldots + 1/\delta_n$. *Alors, si* $a \in k$, *et si N désigne le nombre de solutions dans* k^n *de l'équation* $F = a$, *N est divisible par* p^{b_2}.

Ce résultat reste d'ailleurs vrai sur un corps fini quelconque k à $q = p^f$ éléments, à condition de supposer que chaque $\delta_i = (q-1, d_i)$ divise $p - 1$: N est alors divisible par q^{b_2}; cet exposant b_2 peut encore être « amélioré » si $a = 0$ (voir Joly (1971)). On notera l'analogie entre le théorème 4 ci-dessus et le théorème 3 du chapitre 4.

Notes sur le chapitre 7

§ **1**: la démonstration de la proposition 1 donnée ici est due à Hilbert (« Zahlbericht »); cette proposition est en fait une conséquence d'un résultat plus précis (« congruences de Stickelberger »):

$$\tau(j) \equiv -\lambda^{\sigma(j)}/\rho(j) \pmod{\mathfrak{P}^{\sigma(j)+1}}$$

(avec par définition $\rho(j) = j_0!\, j_1! \ldots j_{f-1}!$); voir Stickelberger (1890), Davenport-Hasse (1934), ou [11], chap. IV, § 3. Pour une interprétation analytique p-adique de ces congruences, voir Dwork (1960).

§ **2-3**: dans Ax (1964), le cadre de la démonstration du théorème 1 est, non pas le corps de nombres $L = \mathbf{Q}(\omega, \zeta)$, mais le corps $\mathbf{Q}_p(\omega, \zeta)$ des racines $p(q-1)$-ièmes de l'unité dans une clôture algébrique du corps p-adique $\mathbf{Q}_p$ (avec les notations du § 1, ce corps $\mathbf{Q}_p(\omega, \zeta)$ est d'ailleurs isomorphe à $L_{\mathfrak{P}}$, complété $\mathfrak{P}$-adique de L); à cette différence près, la démonstration donnée ici est exactement celle d'Ax; elle est (selon Ax lui-même) « suggérée par certaines idées de Dwork [dans sa démonstration