**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 19 (1973)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉQUATIONS ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES SUR UN CORPS FINI
**Autor:** Joly, Jean-René
**Kapitel:** §2. Seconde démonstration du théorème de Chevalley- Warning.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-46287

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

PROPOSITION 1. — *Si un corps commutatif $K$ possède la propriété $(C_1)$, alors il possède la propriété $(B_0)$.*

Démonstration. — Soit en effet $L$ un corps gauche de centre $K$ et de degré fini $n$ sur $K$. On sait que $n$ est un carré (soit $n=d^2$) et que si $e_1, ..., e_n$ est une base de $L$ sur $K$ (en tant qu'espace vectoriel), la norme réduite $Nrd_{L/K}(x)$ d'un élément quelconque $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ de $L$ est un polynôme homogène et de degré $d$, à coefficients dans $K$, par rapport aux composantes $x_1, ..., x_n$ de $x$, qui sont dans $K$ (voir par exemple Bourbaki, Algèbre, chap. VIII, § 12; dans le cas bien connu du corps $\mathbf{H}$ des quaternions ordinaires sur $\mathbf{R}$, rapporté à la base canonique $1, i, j, k$, on a $n = 4 = 2^2$ et $Nrd_{\mathbf{H}/\mathbf{R}}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$); cette norme réduite ne s'annule que pour $x = 0$, donc pour $x_1 = ... = x_n = 0$; comme $K$ est supposé posséder la propriété $(C_1)$, on a nécessairement $n = d^2 \leqslant d$, donc $d = 1$, $n = 1$ et $L = K$, C.Q.F.D.

Redémontrons alors le théorème de Wedderburn; soit $L$ un corps fini, non supposé commutatif, et soit $k$ son centre; $k$ est un corps fini *commutatif*, et il possède la propriété $(C_1)$ (cor. 2), donc la propriété $(B_0)$ (prop. 1); mais comme $L$ est évidemment de degré fini sur $k$, on a alors $L = k$ (par définition de $(B_0)$), et par conséquent $L$ est commutatif, C.Q.F.D.

## § 2. *Seconde démonstration du théorème de Chevalley-Warning.*

**2.1.** Cette seconde démonstration, indépendante de la théorie des polynômes réduits, repose sur le théorème suivant (dont on aura également besoin au § 3):

THÉORÈME 2. — *Soit $F \in k[X]$ un polynôme à $n$ variables, et de degré $d$. Alors, si $d < n(q-1)$, on a*

$$\sum_{\mathbf{x} \in k^n} F(x) = 0 . \tag{2.1.1}$$

Démonstration. — Par linéarité, on peut se ramener au cas où $F$ est un monôme $X_1^{u_1} ... X_n^{u_n}$, avec $d = u_1 + ... + u_n < n(q-1)$; on a alors

$$\sum_{\mathbf{x} \in k^n} F(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \Big( \sum_{x_i \in k} x_i^{u_i} \Big) ; \tag{2.1.2}$$

l'inégalité relative à $d$ montre que pour un $i$ au moins, $u_i < q - 1$, et il suffit évidemment de prouver que, dans (2.1.2), le $i$-ème facteur du membre de droite est alors nul, ce qui résulte du lemme suivant:

LEMME 1. — *Soit $u$ un entier $\geqslant 0$, et posons $S_u = \sum_{x \in k} x^u$; alors*

(i) *si $u$ est non nul et divisible par $q - 1$, $S_u = -1$;*

(ii) *sinon, $S_u = 0$.*

*En particulier, si $u < q - 1$, $S_u = 0$.*

Prouvons ce lemme; comme $x^q = x$ pour tout $x \in k$, on ne restreint pas la généralité de la démonstration en supposant $0 \leqslant u \leqslant q - 1$; on est ainsi amené à distinguer trois cas:

(1) $u = 0$ : $S_u$ est alors somme de $q$ termes égaux à 1; comme $q$ est divisible par la caractéristique $p$ de $k$, on a bien $S_u = 0$;

(2) $u = q - 1$: alors $x^u = 0$ pour $x = 0$, et $x^u = 1$ sinon; $S_u$ est donc somme de $q - 1$ termes égaux à 1, et on conclut comme en (1);

(3) $0 < u < q - 1$: la proposition 7 (chap. 1) avec $d = u$ montre qu'il existe dans $k^*$ un élément $a$ tel que $a^u \neq 1$; comme $x \mapsto ax$ est une bijection de $k$ sur $k$, on peut écrire $S_u = \sum_{x \in k} (ax)^u = a^u S_u$; mais ceci donne $(a^u - 1) S_u = 0$, donc, en simplifiant par $a^u - 1 \neq 0$, $S_u = 0$, C.Q.F.D.

On aurait également pu régler les cas (2) et (3) de la façon suivante: soit $g$ un générateur de $k^*$; les éléments $x$ de $k$ sont alors 0, et les $g^i$ avec $0 \leqslant i \leqslant q - 2$; $S_u$ est donc égal à la somme de la progression géométrique $1 + g^u + g^{2u} + \ldots + g^{(q-2)u}$; d'où $S_u = (1 - g^{(q-1)u})/(1 - g^u)$, ce qui vaut bien 0, puisque $g^{q-1} = 0$. Remarquons par ailleurs que la nullité des $q - 2$ quantités $S_u$ $(0 < u < q - 1)$ équivaut, compte tenu des *formules de Newton*, à la nullité des $q - 2$ fonctions symétriques élémentaires des éléments de $k^*$ autres que le produit (voir chap. 1, sect. 1.1).

**2.2.** Utilisons maintenant le théorème 2 pour redémontrer le théorème de Chevalley-Warning. Considérons le polynôme $\bar{F}$ défini par (1.1.2) (sect. 1.1); il est de degré $d(q-1) < n(q-1)$, puisqu'on a supposé $n > d$; le théorème 2 permet donc d'écrire

$$\sum_{\mathbf{x} \in k^n} \bar{F}(\mathbf{x}) = 0 ; \tag{2.2.1}$$

mais $\bar{F}(\mathbf{x})$ vaut 1 si $\mathbf{x} \in V$, et 0 si $\mathbf{x} \notin V$; d'où une seconde égalité:

$$\sum_{\mathbf{x} \in k^n} \bar{F}(\mathbf{x}) = N.1 ; \tag{2.2.2}$$

(2.2.1) et (2.2.2) donnent alors $N.1 = 0$, soit, puisque $k$ est de caractéristique $p$, $N \equiv 0 \pmod{p}$, C.Q.F.D.