Chapitre III UNE FORMULE DE RÉSOLUTION POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY-RIEMANN

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

On porte cette relation dans le théorème 4 ainsi on en tire:

THÉORÈME 8.

Pour chaque domaine strictement pseudo-convexe G de $\mathbf{C}^n$, avec un bord de classe $\mathscr{C}^4$, il existe des doubles formes $\Omega_{nq}(x, y)$ et $A_{nq}(x, y) \in \mathscr{C}^1_{n, n-q-1;\, o, q}(W)$ et $C^1_{n, n-q-2;\, o, q}(W)$ sur un ouvert W contenant $\partial G \times G$, de telle sorte que ce qui suit est valable:
Si $\gamma \in \mathscr{C}^\infty_{pq}(\bar{G})$, alors $\forall y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left[\int_{x \in \partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + (-1)^{q+1} \int_{x \in \partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y \right.$$

$$\left. - \int_G \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)\right] + \bar{\partial}_y \Gamma(y).$$

Avec $\Gamma \in \mathscr{C}^\infty_{(o, q-1)}(G)$. On rappelle $\bar{\partial}_y \Omega_{nq} = 0$ pour $q = 0$, $\Omega_{nq} = 0$ pour $q > 0$, Ω_{nq} et A_{qn} sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ en y.

Il est clair que pour les domaines G_ν introduits au début de ce chapitre, la même représentation est valable avec les mêmes noyaux.

CHAPITRE III

UNE FORMULE DE RÉSOLUTION POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY-RIEMANN

Si G est un domaine borné dans le plan avec un bord suffisamment régulier et g une fonction bornée $\mathscr{C}^\infty$ sur G, alors la fonction

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{g(x)}{x - y} dx \wedge d\bar{x}, \quad y \in G,$$

satisfait l'équation différentielle $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{y}} = g$.

Dans ce chapitre nous construisons au moyen du théorème 8 une solution de $\bar{\partial}\alpha = \beta$ sur un domaine strictement pseudo-convexe au moyen d'une intégrale de la même forme.

§ 7. Solution de l'équation

1. $G, G_\nu, \varphi, W, \Omega_{nq}, A_{nq}$ sont définis comme dans le chapitre précédent. Soit $\beta \in \mathscr{C}^\infty_{0,q+1}(G)$ bornée sur G pour la norme définie au § 1.5.

Nous posons

$$\gamma_\nu(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G_\nu} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y),$$

$$\zeta_\nu(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y),$$

$\nu \in \mathbf{N}, 0 \leq q \leq n-1$.

Notons qu'on ne peut a priori remplacer G_ν par G car β n'est pas définie sur ∂G.

2. *Lemme 7.1.* La suite $\gamma_\nu(y)$ converge localement uniformément sur G ainsi que toutes ses dérivées vers

$$\gamma(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y)$$

et $\qquad \gamma \in \mathscr{C}^\infty_{0,q}(G).$

Ceci résulte du fait que β est bornée et du lemme 4.4.

3. Nous nous occupons des propriétés correspondantes pour ζ_ν. Puisqu'on peut différentier sous le signe intégrale à un ordre quelconque, il vient aussitôt:

Lemme 7.2. Les formes ζ_ν sont indéfiniment différentiables sur G_ν. Le lemme 7.3 n'est pas tout aussi trivial.

Lemme 7.3. La suite ζ_ν converge avec toutes ses dérivées localement uniformément sur G.

Démonstration. Soit $G' \subset\subset G_{\nu_0}$ et $\mu > \nu > \nu_0$.

$$\begin{aligned}\zeta_\mu(y) - \zeta_\nu(y) &= (-1)^{q+1} \int_{\partial G_\mu - \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq} \\ &= (-1)^{q+1} \int_{\partial(G_\mu \setminus G_\nu)} \beta(x) \wedge A_{nq}\end{aligned}$$

$$= (-1)^{q+1} \int_{G_\mu \setminus G_\nu} d_x(\beta(x) \wedge A_{nq})$$
$$= (-1)^{2[q+1]} \int_{G_\mu \setminus G_\nu} \beta(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y),$$

à cause de $\bar{\partial}\beta = 0$.

Maintenant d'après la construction de $g(x, y)$, la forme $\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y)$ pour $x \in G \backslash G_{\nu o}$ et $y \in G'$ est bornée, donc avec une constante convenable

$$|\zeta_\mu(y) - \zeta_\nu(y)| \leq K \int_{G_\mu \setminus G_\nu} \bigwedge_{\lambda=1}^{n} (dx'_\lambda \wedge dx''_\lambda).$$

Cela montre la convergence uniforme sur G' de la suite ζ_ν. Par différentiation de $\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y)$ sous le signe intégral par rapport à y, on constate la convergence uniforme locale de toutes les dérivées de $\zeta_\nu(y)$.

4. Nous posons maintenant

$$\zeta(y) = \lim_{\nu \to \infty} \zeta_\nu(y), \quad \zeta \in \mathscr{C}^\infty_{(o,q)}(G).$$

Nous formulons alors le résultat de ce chapitre.

THÉORÈME 9.

Soit $\beta \in \mathscr{C}^\infty_{o,q+1}(G)$, telle que β est bornée sur G et $\bar{\partial}\beta = 0$. Alors la $(0, q)$-forme $\alpha = \gamma + \zeta$ satisfait à $\bar{\partial}\alpha = \beta$, où l'on rappelle

$$\gamma(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y),$$

$$\zeta(y) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y).$$

Démonstration. A cause de la pseudo-convexité de G, il existe $\eta \in \mathscr{C}^\infty_{o\,q}(G)$ telle que $\bar{\partial}\eta = \beta$; η n'a pas besoin d'être borné mais possède d'après le théorème 8 la représentation

$$\eta(y) = \zeta_\nu(y) + \gamma_\nu(y) + \frac{1}{(2\pi i)^n} \left[\int_{x \in \partial G_\nu} \eta(x)\, \Omega_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y \Gamma(y) \right]$$

pour $y \in G_{\nu o}$ et $\nu > \nu_o$.

De là il s'ensuit

$$\beta(y) = \bar{\partial}\eta(y) = \bar{\partial}\zeta_\nu(y) + \bar{\partial}\gamma_\nu(y).$$

Faisons dans cette équation $\nu \to \infty$; ainsi, pour $y \in G_{\nu o}$,

$$\bar{\partial}\zeta_\nu(y) + \bar{\partial}\gamma_\nu(y) \to \bar{\partial}\zeta(y) + \bar{\partial}\gamma(y),$$

d'après les lemmes 7.3 et 7.1. Le raisonnement vaut pour tout ν_o, donc $\forall y \in G$, $\bar{\partial}\alpha = \beta$.

Chapitre IV

ÉVALUATION POUR LA NORME UNIFORME

§ 8

1. Rappelons que la norme uniforme a été définie au § 1.5 pour des éléments de $\mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{oq}(G)$; on obtient

$$\forall y \in G, \ |\alpha(y)| = \sup_{|x_1| \leq 1 \ldots |x_q| \leq 1} \alpha(y)[x_1, \ldots, x, q],$$

$$|\alpha| = \sup_{y \in G} |\alpha(y)|.$$

Le but de ce chapitre est de prouver, avec les notations du chapitre précédent: si $\bar{\partial}\beta = 0$, $\exists \alpha, K > 0$ tels que $\bar{\partial}\alpha = \beta$ et $|\alpha| \leq K|\beta|$.

2. *Majoration de* γ

On avait $\quad \gamma(y) = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y).$

On en tire $\quad |\gamma(y)| \leq \dfrac{|\beta|}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{x \in G} \frac{K_1}{|x-y|^{2n-1}} \bigwedge_{\lambda=1}^{n} (d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda).$

Soit S la sphère de rayon R = (diamètre G) et centrée en 0.

$$|\gamma(y)| \leq \frac{K_1 |\beta|}{(2\pi)^n} \int_S \bigwedge_{\lambda=1}^{n} \frac{(d\bar{z}_\lambda \, dz_\lambda)}{|z|^{2n-1}} \leq K|\beta|,$$

où K est indépendant de y, d'où $|\gamma| \leq K|\beta|$.

La majoration de ζ est beaucoup plus difficile à obtenir; nous aurons d'abord besoin de certaines évaluations sur la fonction g du théorème 5.