

# GÉOMÉTRIES COMBINATOIRES

Autor(en): **Lesieur, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-43861>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# GÉOMÉTRIES COMBINATOIRES

par L. LESIEUR

Je me propose de passer en revue les notions de géométries combinatoires (d'après Crapo et Rota [1]), de treillis géométriques (d'après Dubreil-Jacotin, Lesieur et Croisot [3]) et d'examiner plus particulièrement le cas de certains plans combinatoires finis qui sont en même temps des « blocks designs » (d'après Dembowski [2]) avec quelques exemples précis.

## 1. Géométries combinatoires (de dimension finie). [1] § 1.

Elles sont définies par un ensemble  $S$  (l'ensemble des points) avec une application de fermeture de Moore dans l'ensemble  $\mathcal{P}(S)$  des parties de  $S$  ( $A \subset \bar{A}$ ;  $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$ ;  $\overline{\bar{A}} = A$ ) vérifiant la propriété d'échange:

$$a \in \overline{A \cup \{b\}}, \quad a \notin \bar{A} \Rightarrow b \in \overline{A \cup \{a\}} \quad \begin{cases} a, b \in S \\ A \in \mathcal{P}(S) \end{cases}$$

l'axiome de fermeture des points ou *axiome géométrique*:

$$\bar{a} = a \quad \forall a \in S \quad \text{et} \quad \overline{\emptyset} = \emptyset, \quad (\text{noter que } \bar{S} = S),$$

et l'axiome de la dimension finie ou *axiome de finitude*:

$$A \subseteq S \text{ possède un sous-ensemble fini } A_f \text{ tel que } \bar{A}_f = \bar{A}.$$

Les ensembles fermés s'appellent les variétés de la géométrie et on peut définir une dimension de chaque variété au moyen de l'axiome de finitude:  $\emptyset$  est de dimension  $-1$ , un point  $a \in S$  est de dimension  $0$ , une droite (fermeture de 2 points distincts) est de dimension  $1$  etc..., la dimension de  $S$  est celle de l'espace.

*Exemples :*

6 points et 7 droites (fig. 1)

7 points et 7 droites (plan projectif fini) (fig. 2)

## 2. Treillis géométrique $L(S)$

Les ensembles fermés (ou variétés) suffisent à définir l'application de fermeture de Moore en postulant que l'intersection finie ou infinie de fermés est un fermé.

On peut les ordonner par la relation d'inclusion des ensembles et obtenir ainsi un *treillis* (particulier) qu'on appelle *géométrique*. Il est possible de donner des propriétés caractéristiques de ces treillis (voir [3]) qui permettent de reconstituer la géométrie combinatoire. En particulier la notion de dimension apparaît également comme longueur d'une chaîne maximale allant de  $\emptyset$  à  $S$ , diminuée de 1, cette longueur étant un invariant pour toutes les chaînes maximales considérées.

*Exemple :*

Géométrie sur 5 points schématisée par le dessin de la figure 3, où les points situés sur les droites dessinées constituent une variété, qui est une droite de cette géométrie. La figure 4 représente le treillis  $L(S)$  correspondant. C'est un treillis de dimension 2 (rang 3). Une géométrie de dimension 2 s'appelle un plan.

Bien entendu, une géométrie projective ou affine de dimension finie constitue un exemple de géométrie combinatoire (que l'on peut d'ailleurs caractériser dans la classe des géométries combinatoires). Mais il y en a beaucoup d'autres, citons les géométries affines généralisées ([3], p. 303), l'ensemble des relations d'équivalence sur un ensemble, les six exemples dits classiques de [1] etc...

## 3. Géométries sur les ensembles finis

Cherchons par exemple les géométries finies sur 5 points.

dimension 1:  $S$  est la seule droite. (fig. 5)

dimension 2: 4 possibilités, avec représentation plane de la figure 6

dimension 3: 3 possibilités avec représentation dans l'espace de la figure 7

dimension 4: 1 possibilité, représentée par 5 points en position générale dans l'espace de dimension 4.

Le nombre  $g_{nd}$  des géométries « non isomorphes » sur  $n$  éléments et de dimension  $d$  est donné par le tableau [1], § 3.

	$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$d$									
1			1	1	1	1	1	1	1
2				1	2	4	9	23	68
3					1	3	11	49	617
4						1	4	22	217
5							1	5	40
6								1	6
7									1
$g_n$			1	2	4	9	26	101	950

Si l'on pose  $g_n = g_{n1} + g_{n2} + \dots + g_{n,n-1} =$  (nombre total des géométries différentes sur  $n$  éléments), on constate que  $g_{n+1} \# (g_n)^{\frac{3}{2}}$  ce qui donnerait environ 30 000 géométries différentes sur un ensemble à 9 points.

Nous allons donc pour continuer nous limiter au cas des plans ( $d=2$ ), ligne soulignée du tableau.

#### 4. Géométries planes combinatoires

Si  $d = 2$ , les seules variétés sont les points, les droites et l'ensemble  $S$  tout entier. Une géométrie plane combinatoire pourra alors être définie par l'ensemble  $S$  de ses points et l'ensemble de ses droites, qui est un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(S)$  satisfaisant aux axiomes suivants (cf [3], p. 318).

$G_1$ . Par deux points distincts il passe une droite et une seule.

$G_2$ . Toute droite contient au moins deux points distincts.

$G_3$ . Il existe 3 points non situés sur une même droite.

Si l'ensemble  $S$  est fini, on obtient un plan combinatoire fini.

#### 5. $(k, r)$ plans combinatoires

Nous allons considérer maintenant des géométries planes combinatoires finies qui sont également des  $(k, r, s)$  plans au sens de G. HEUZE [7] et des « blocks-designs » ou configurations tactiques au sens de [2], § 2. D'une façon précise nous définissons un  $(k, r)$  plan combinatoire par les axiomes suivants (concernant comme toujours, un ensemble  $S$  de points et un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(S)$  dont les éléments sont dénommés droites)

1. Par 2 points distincts il passe une droite et une seule
2. Toute droite contient  $k$  points distincts ( $k \geq 2$ ) et  $k$  seulement
3. Tout point appartient à  $r$  droites distinctes, et  $r$  seulement
4. Il existe 3 points non alignés: triangle  $p, q, r$ .

Il est clair que ces axiomes renforcent ceux des géométries planes combinatoires (comparer avec  $G_1, G_2, G_3$ ); ils coïncident d'autre part avec les  $(k, r, s)$  plans de G. HEUZE lorsqu'on prend  $s = k$  [7], et avec les blocks designs de Dembowski lorsqu'on prend le paramètre  $b_2 = \lambda$  égal à 1.

Étudions les premières propriétés de ces plans.

*Propriété 1. On a  $r \geq k$  (1)*

En effet, si  $a$  est un point donné, il existe au moins une droite ne passant pas par  $a$ , par exemple l'un des côtés du triangle  $p, q, r$ . Sur cette droite  $D$  se trouvent  $k$  points dont chacun détermine avec  $a$  une droite passant par  $a$ . Il y a donc au moins  $k$  droites passant par  $a$ . Les autres, qui ne rencontrent pas  $D$  sont en nombre  $h = r - k \geq 0$ , nombre qu'on peut appeler *nombre d'Euclide* du plan.

*Propriété 2. Un  $(k, r)$  plan combinatoire est fini et le nombre de ses points*

$$\text{est } \boxed{v = 1 + (k-1)r} \quad (2)$$

En effet, si  $O$  est un point fixé, tous les autres points  $p$  sont situés sur les droites passant par  $O$ .

Sur chaque droite se trouvent  $k - 1$  points autres que  $O$  et on balaye tout le plan avec l'ensemble de ces  $r$  droites, d'où la formule.

*Propriété 3. Le nombre  $b$  des droites (ou blocs) est donné par la formule*

$$\boxed{kb = vr} \text{ et on a } b \geq v. \quad (3)$$

En effet il y a  $k$  points sur chaque droite d'où  $kb$  points dont chacun est compté  $r$  fois. On en déduit la formule (3). L'inégalité  $b \geq v$  résulte de (1).

*Propriété 4. Les plans projectifs finis sont les  $(k, r)$  plans combinatoires pour lesquels  $r = k \geq 3$  (ou  $h=0$ ) et les plans affines sont les  $(k, r)$  plans combinatoires pour lesquels  $r = k + 1$  (ou  $h=1$ )*

Il en résulte que la classe des plans  $(k, r)$  — plans combinatoires va comprendre celle des plans projectifs finis et celle des plans affines finis.

*Propriété 5.*  $k$  divise  $r(r-1)$  donc  $h(h-1)$  (4)

$$\text{En effet } kb = vr = r + (k-1)r^2 = kr^2 - r(r-1)$$

*Propriété 6.*  $k(k-1)$  divise  $v(v-1)$  (5)

$$\text{Cela résulte de } v(v-1) = v(k-1)r = k(k-1)b.$$

En vue d'étudier les  $(k, r)$  plans combinatoires à  $v$  éléments,  $v$  donné, on peut remarquer qu'il existe toujours la solution :

$$k = 2, r = v - 1.$$

qui est la solution triviale d'un ensemble à  $v$  éléments dont les droites sont constituées par les sous-ensembles à deux éléments. Cette solution est représentée par exemple par  $v$  points en position générale dans le plan. Nous l'écartérons des solutions explicites que nous allons maintenant donner pour le cas  $v \leq 20$ . A titre d'exemple, on peut vérifier que les 4 possibilités trouvées au § 3 pour les plans combinatoires à 5 éléments ne donnent qu'un  $(k, r)$ -plan, le dernier cas, qui correspond précisément à  $k = 2, r = 4$ .

#### 6. Les $(k, r)$ plans combinatoires à $v$ éléments, $v < 20$ .

Indiquons sur le cas  $v = 13$  le procédé de recherche des conditions nécessaires.

On utilise les conditions nécessaires  $v - 1 = (k-1)r, r \geq k, k \mid r(r-1)$ ; on a donc:  $v - 1 = 12 = 3 \times 2 \times 2$  d'où les possibilités:

$$k - 1 = 1, r = 12 \text{ c'est-à-dire } k = 2, r = 12 \text{ (solution triviale)}$$

$$k - 1 = 2, k = 3, r = 6 \text{ qui vérifie bien } k \mid r(r-1).$$

$$k - 1 = 3, k = 4, r = 4 \text{ qui donne le plan projectif d'ordre 3.}$$

$$k - 1 = 4, k = 5, r = 3 \text{ est impossible } (r \geq k).$$

En procédant de même pour tous les nombres  $v < 20$  et en écartant les solutions triviales et celles qui correspondent aux plans projectifs ou aux plans affines, il reste les trois cas suivants à étudier pour lesquels le problème d'existence se pose.

$$1^{\text{er}} \text{ cas. } v = 13, k = 3, r = 6.$$

En numérotant les points  $0, 1, 1', 2, 2', 3, 3', 4, 4', 5, 5', 6, 6'$  on peut obtenir, après quelques tâtonnements, une solution avec les 26 droites suivantes:

011' } 022' } 033' } 044' } 055' } 066' }	6 droites	123 } 143' } 152' } 164' } 15' 6' }	5 droites	1' 2 3' } 1 2' 6 } 1' 4 5' } 1' 5 6' } 1' 4' 3 }	5 droites	24 6' } 24' 5 } 26 5' }	3 droites	453 } 462' }	2
						3' 65 } 3' 2' 5' } 3' 4' 6' }	3 droites	5' 34' } 6' 2' 3' }	1 1

Chaque droite contient 3 points et par tout point il passe 6 droites. Le nombre d'Euclide est  $h = 3$ .

On peut obtenir une solution algébrique de ce problème (voir en Appendice).

2<sup>e</sup> cas.  $v = 15, k = 3, r = 7$

Une solution peut être obtenue ici en appliquant une méthode générale (cf. [2], page 29) à partir d'un espace projectif de dimension 3 sur le corps fini  $F_2$  à 2 éléments. Les points sont ceux de l'espace, les droites sont celles de l'espace. La structure est alors celle d'un  $(k, r)$ -plan combinatoire. Numérotions les points comme l'indique la figure 8.

Les 35 droites correspondent aux parties suivantes :

011' } 022' } 033' } 044' } 055' } 066' } 077' }	7 dr	142' } 124' } 136' } 157' } 163' } 175' }	6 dr	235' } 241' } 253' } 267' } 276' }	5 dr	347' } 352' } 361' } 374' }	4 dr	456' } 465' } 473' }	3 dr
		564' } 571' }	2 dr	1' 2' 4' } 1' 3' 6' } 1' 5' 7' }	3 dr	3' 4' 7' }	1 dr		
		672' }	1 dr			4' 5' 6' }	1 dr		
				2' 3' 5' } 2' 6' 7' }	2 dr				

3<sup>e</sup> cas.  $v = 19, k = 3, r = 9$

Une solution peut être obtenue par un système de Netto, [2] p. 98, par la méthode suivante :

On part du corps  $F_{19}$  à 19 éléments. C'est l'ensemble  $S$ . Le groupe multiplicatif  $\Gamma$  des carrés non nuls possède 9 éléments qui sont :

$$\Gamma = \{1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5\}$$

$$2^2 \ 3^2 \ 4^2 \ 5^2 \ 6^2 \ 7^2 \ 8^2 \ 9^2$$

Il existe un sous-groupe multiplicatif  $G$  de  $\Gamma$  qui est formé des 3 éléments :

$$G = \{1, 11, 7\}$$

Alors, les triples alignés sont les transformés de  $G$  par les transformations du groupe  $\Phi$  à  $19 \times 9$  éléments :

$$x \rightarrow x\alpha + a \quad \alpha \in \Gamma, a \in F_q$$

Comme une même droite peut être obtenue à partir de 3 transformations différentes il existe  $b = \frac{19 \times 9}{3} = 57$  droites. On a  $vr = kb$ , d'où

$$r = 3 \times 19 \times 3 \times \frac{1}{19} = 9 \text{ ce qui donne bien les paramètres } k = 3, r = 9$$

du cas  $v = 19$ .

On remarquera que les 3 cas à étudier correspondent tous à  $k = 3$ , c'est-à-dire à des *systemes de triplets* de Steiner, ([2], p. 97). Or le problème d'existence des solutions est résolu dans ce cas depuis longtemps (Kirkman, 1847, Netto [8], 1893) par la condition nécessaire

$$k \{k-1\} = 6 \text{ divise } v(v-1) = 19 \times 18 \text{ (propriété 6)}$$

Beaucoup plus récemment, Hanani [6], 1965, a démontré que cette condition est suffisante pour  $k \leq 5$ . Le problème est ouvert pour les valeurs supérieures de  $k$ . On trouvera des indications sur les résultats connus dans [4].

*Appendice (Netto [8] p. 145)  $v = 6 \times 2 + 1$  premier :*

*Une solution du 1<sup>er</sup> cas :  $v = 13, k = 3, r = 6$ .*

On considère une racine primitive mod 13, par exemple :

$g = 2$  dont les puissances sont :

$$1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7$$

$$1, g \ g^2 \ g^3 \ g^4 \ g^5 \ g^6 \ g^7 \ g^8 \ g^9 \ g^{10} \ g^{11}$$



On forme les triples:

$$(1) \quad (0, 1, 4), (028) \\ (0, g^0, g^2), (0, g^1, g^3)$$

et 12 autres à partir de ceux-là:

$$(2) \quad (\chi, \chi+g^\alpha, \chi+g^{2\alpha}) \quad (\chi = 1, 2, 3, \dots, 12)$$

$$\text{ou} \quad (\chi, \chi+1, \chi+4) \quad (\chi, \chi+2, \chi+8) \quad \chi = 0, 1, \dots, 12$$

On obtient alors les  $13 \times 2 = 26$  triples cherchés qui sont donc explicitement:

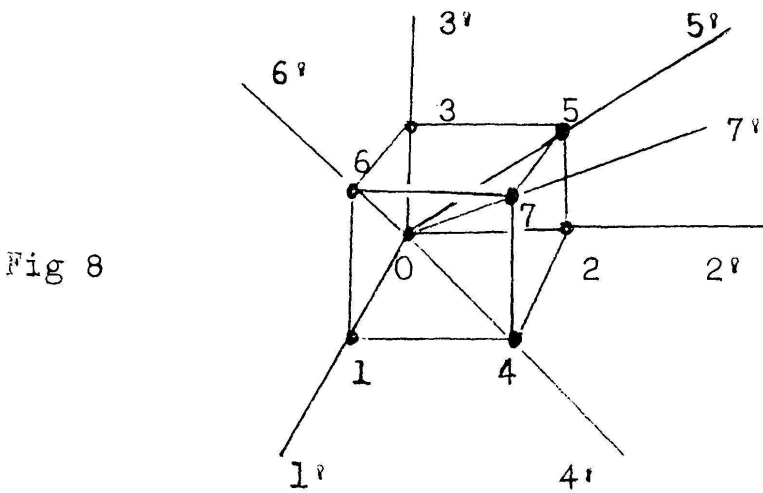
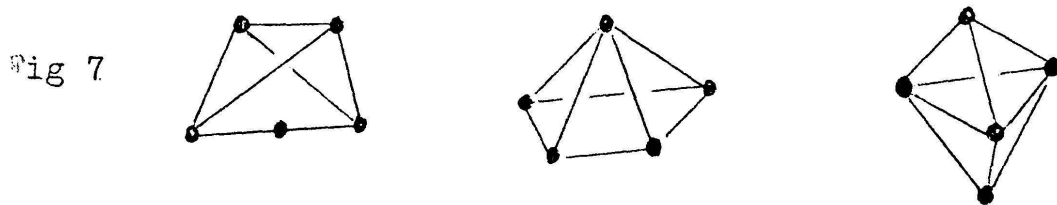
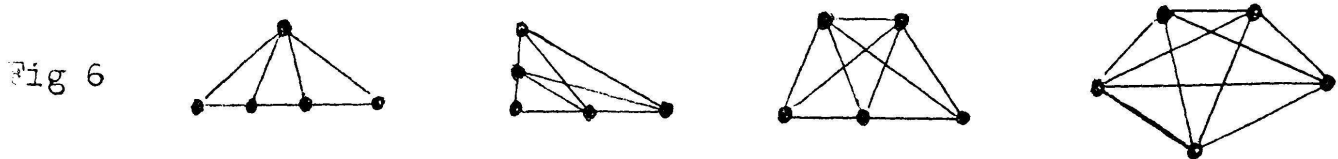
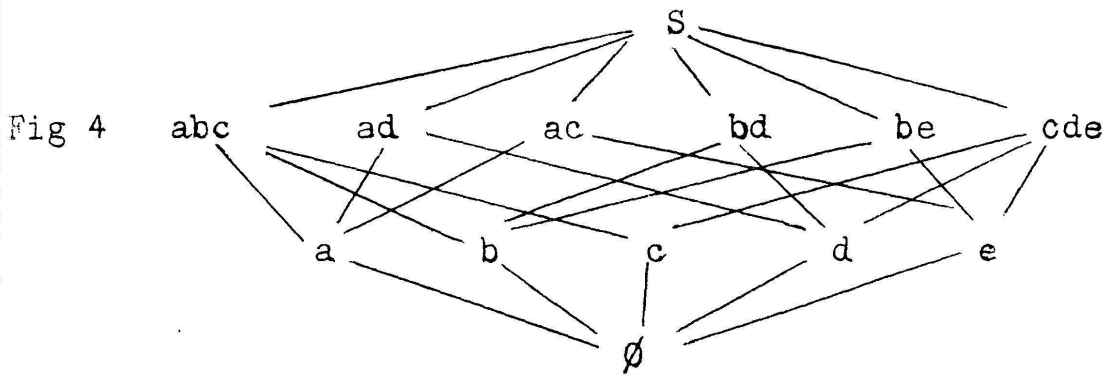
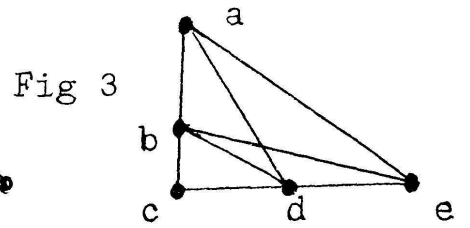
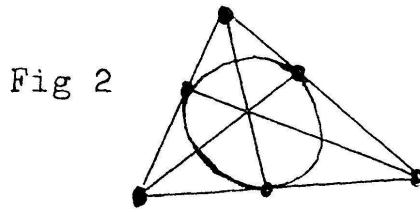
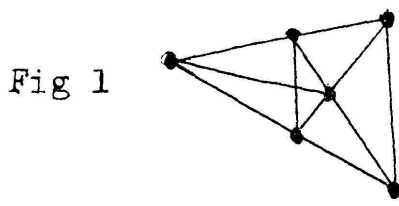
( 0, 1, 4)	( 0, 2, 8)
( 1, 2, 5)	( 1, 3, 9)
( 2, 3, 6)	( 2, 4, 10)
( 3, 4, 7)	( 3, 5, 11)
( 4, 5, 8)	( 4, 6, 12)
( 5, 6, 9)	( 5, 7, 0)
( 6, 7, 10)	( 6, 8, 1)
( 7, 8, 11)	( 7, 9, 2)
( 8, 9, 12)	( 8, 10, 3)
( 9, 10, 0)	( 9, 11, 4)
(10, 11, 1)	(10, 12, 5)
(11, 12, 2)	(11, 0, 6)
(12, 0, 3)	(12, 1, 7)

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CRAPO, H. and G. ROTA, Combinatorial geometries, University of Waterloo and MIT, déc. 1968
- [3] DUBREIL-JACOTIN, M. L., L. LESIEUR et R. CROISOT, Leçons sur la théorie des treillis... Paris, Gauthier Villars 1953, partie III.
- [2] DEMBOWSKI, P., Finite Geometries, *Ergebnisse der Math.* 44, 1968
- [7] HEUZÉ, G., Plans finis, 1968, Département de Mathématiques, Orléans.
- [8] NETTO, 1893, Zur théorie der Tripelsystem, *Math. Annalen* 42, p. 143-152.
- [5] HANANI, 1960, On quadruple systems, *Cand. J. Math.* 12, 145-157.
- [6] HANANI, 1965, A balanced incomplete block design, *Ann. Math. Statist.* 36, 711.
- [4] GUERIN, R., 1965, Vue d'ensemble sur les plans en blocs incomplets équilibrés et partiellement équilibrés, *Rev. Internat. Statist.* 33, 24-58.

( Reçu le 9 juillet 1970 )

L. Lesieur  
112 bis rue Houdan  
92 Sceaux



**vide-leer-empty**