Volumes, Surfaces, Longueur

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Ceci provient simplement de ce qu'un groupe linéaire irréductible ne peut pas laisser invariantes deux formes quadratiques définies positives non proportionnelles; pour le voir, réduire l'une de ces formes par rapport à l'autre.

Par exemple (2.6.2) nous tranquillise, lorsque nous pensions à écrire les sphères, les projectifs comme espaces homogènes: $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, $P^n(\mathbf{C}) = U(n+1)/U(n) \times U(1)$, $P^n(\mathbf{H}) = Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1)$. Comme les groupes d'isotropie H agissent dans tous ces cas de façon irréductible, on n'obtient pas, par cette méthode, d'autres s.r. que celles de (2.3.1), (2.5.1), 2.5.2.) (à un scalaire près).

(**2.7**): *le plan projectif des octaves de Cayley* $(P^2(\mathbf{Ca}), g_0)$.

L'espace $P^2(\mathbf{Ca})$, peut être défini comme l'espace homogène $F_4/\mathrm{Spin}(9)$ (voir [8]); Spin (9) agit de façon irréductible d'où, sur $P^2(\mathbf{Ca})$ une s.r. canonique (on prendra celle normée en sorte que toutes les géodésiques soient de longueur π, voir (9.8)): $(P^2(\mathbf{Ca}), g_0)$.

Nous poserons, pour tout n:

(**2.8**): $P_o^n = S^n$, $P_1^n = P^n(\mathbf{R})$, $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$, $P_4^n = P^n(\mathbf{H})$, $P_8^2 = P^2(\mathbf{Ca})$;

Ainsi que $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$ et $i = dim_{\mathbf{R}} K$. Noter que $dim_{\mathbf{R}} P_1^n = i \,.\, n$. On aura donc les submersions riemanniennes:

(**2.9**): $(S^{in+i-1}, g_0) \xrightarrow{P} (P_i^n, g_0)$, $\qquad i = 1, 2, 4.$

On rappelle les difféomorphismes entre P_i^1 et S^i ($i=1, 2, 4, 8$). En fait on a même des isométries entre

(**2.10**): (P_i^1, g_0) et $(S^i, \frac{1}{4}g_0)$, $\qquad i = 1, 2, 4, 8.$

Enfin, en tant qu'espaces homogènes, les P_i^n se caractérisent comme étant exactement l'ensemble des espaces symétriques de rang égal à 1: [11], p. 354 et ii. Ces (P_i^n, g_0) vont servir de modèles à une grande partie de ce qui suit.

Volumes, Surfaces, Longueur

3. *Définitions.*

Le fait simple et fondamental est:

(**3.1**): *une* v.r. $(,M\ g)$ *admet une mesure canonique*, v_g.

Heuristiquement, ceci vient de ce qu'un espace euclidien admet une mesure canonique (la mesure de Lebesgue pour $\mathbf{R}^n$), et comme (M, g) est partout infinitésimalement un espace euclidien, on a gagné. Plus précisément: pour un espace vectoriel euclidien, on prend une orientation quelconque et soit n la dimension de cet espace E; il existe alors sur E une n-forme alternée canonique, ω; elle vaut $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$ sur toute base orthonormée directe $\{e_i\}$ de E (ce qui a un sens parce que le déterminant d'une rotation est égal à 1). On peut aussi trouver ω en remarquant que $\overset{n}{\wedge} E$, d'une part est euclidien, d'autre part est de dimension un, donc possède un vecteur unique de norme un correspondant à l'orientation choisie pour E; c'est ω. Soit (M, g) une variété riemannienne, U un ouvert domaine d'une carte; fixons une orientation sur U. D'après ce qui précède il existe sur U une n-forme canonique (n=*dim* M) $m \mapsto \omega_m$. Pour $f : M \to \mathbf{R}$ à support dans U on pose $\int_M f v_g = \int_U f\omega$, au sens de l'intégrale sur une variété orientée d'une forme alternée de degré maximum. Il n'y a plus qu'à remarquer que la valeur $\int_U f\omega$ ne change pas si l'on change l'orientation de U, puis que v_g se définit pour des fonctions à support compact quelconque à l'aide de partitions de l'unité.

(3.2): *soit* (M, g) *une* v.r. *compacte. Le* volume *de* (M, g) *est* vol (M, g) $=$ $= \int_M \mathrm{v}_g$, *c'est-à-dire la masse totale de* (M, g) *pour sa mesure canonique; si* dim M $= 1$, *on dit* longueur *et écrit* long (M, g), *si* dim M $= 2$, *on dit* surface *et écrit* surf (M, g).

On peut calculer explicitement vol (P_i^n, g_0) pour tous n, i: voir le tableau. Pour S^n, c'est un vieux résultat. On passe de là à P_1^n, revêtu à deux feuillets par S^n, en divisant par deux.

Par trivialisation locale et le théorème de Fubini on voit que:

(3.3): *soit* (M, g) $\xrightarrow{p}$ (N, h) *une submersion riemannienne, qui est une fibration et supposons* M compacte. *Alors*

$$\mathrm{vol}\,(M, g) = \int_{n \in N} \mathrm{vol}\,(p^{-1}(n), g)\,.\, v_h.$$

Appliquons ceci à P_2^n (resp. P_4^n), pour g_0 bien sûr. Les fibres sont des grands cercles (resp. des sous-sphères de dimension trois) de S^{2n+1} (resp. S^{4n+3}), fibres ayant toutes même longueur (resp. volume) égale à 2π (resp. égal à $2\pi^2$, voir tableau). D'où les valeurs de la première ligne du tableau.

Pour (P_8^2, g_0), il faut employer d'autres méthodes; on en trouvera une dans [1], p. 209.

Si $N \subset M$ est une sous-variété de (M, g), on posera (voir (2.3)):

(3.4) $\quad$ $\mathrm{vol}\,(N, g) = \mathrm{vol}\,(N, g|_N)$.

Soit $c : [a, b] \to M$ une courbe d'une v.r. (M, g); même si $c([a, b])$ n'est pas une sous-variété de M on peut définir la longueur de c par:

$$\text{(3.5)} \qquad \operatorname{long}(c, g) = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

Exemple : soit $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$ une submersion riemannienne; une courbe c de M sera dite *horizontale* si$c'(t) \in H_{c(t)}$ pour tout t. Des définitions (2.5) et (3.5) on déduit:

(3.6): $\operatorname{long}(p \circ c, h) \leqq \operatorname{long}(c, g)$; en outre $\operatorname{long}(p \circ c, h) = \operatorname{long}(c, g)$ si et seulement si c est horizontale.

4. *Le théorème de Pu.*

Avec cette seule notion de volume se posent déjà des problèmes naturels, loin d'être résolus en général. Commençons par un des rares cas où l'on ait un résultat. Soit g une s.r. sur P_1^2, le plan projectif réel. A (P_1^2, g) on peut attacher deux nombres réels, son volume $\operatorname{vol}(P_1^2, g)$ et son *carcan*, $\operatorname{carc}(P_1^2, g)$, égal à la borne inférieure de la longueur des courbes fermées de P_1^2 non homotopes à zéro:

$$\textbf{(4.1)} \qquad \operatorname{carc}(P_1^2, g) = \inf{}_c \text{non} \sim_0 \operatorname{long}(c, g)$$

où il s'agit de l'homotopie des courbes fermées (c'est-à-dire des lacets sans point base). Il est naturel d'espérer que si $\operatorname{carc}(P_1^2, g) \geqq k$, alors $\operatorname{surf}(P_1^2, g)$ est supérieur ou égal à un nombre ne dépendant que de k. Définissons le *quotient* de (P_1^2, g) comme le rapport homogène de degré zéro:

$$\textbf{(4.2)} \qquad \operatorname{quot}(P_1^2, g) = \frac{\operatorname{surf}(P_1^2, g)}{(\operatorname{carc}(P_1^2, g))^2}.$$

La première chose à faire est de calculer $\operatorname{quot}(P_1^2, g_0)$. Le tableau donne le numérateur; pour $\operatorname{carc}(P_1^2, g_0)$, on utilise le théorème (13.1) et (9.1) (il est bien naturel que les plus petites courbes non homotopes à zéro de (P_1^2, g_0) soient les droites projectives!). Donc $\operatorname{quot}(P_1^2, g_0) = 2/\pi$ (voir tableau). L'interrogation précédente est complètement résolue par le:

(4.3): *théorème* (Pu, [14]). *Quel que soit la* s.r. g *sur* P_1^2, *on a* $\operatorname{quot}(\mathrm{P}_1^2, \mathrm{g}) \geqq \operatorname{quot}(\mathrm{P}_1^2, \mathrm{g}_0)$. *En outre, si* $\operatorname{quot}(\mathrm{P}_1^2, \mathrm{g}) = \operatorname{quot}(\mathrm{P}_1^2, \mathrm{g}_0)$, *alors* $(\mathrm{P}_1^2, \mathrm{g})$ et $(\mathrm{P}_1^2, \mathrm{g}_0)$ *sont isométriques.*

Esquissons la démonstration (voir [14] ou [1], p. 309). On prend le revêtement riemannien (voir (2.4)) $(S^2, \tilde{g})$ de (P_1^2, g). D'après le théorème fondamental de la représentation conforme, appliqué à (S^2, g), il existe un difféomorphisme $f : S^2 \to S^2$ tel que $\tilde{f} * \tilde{g} = \tilde{\alpha} \,.\, g_0$, où g_0 est la s.r. canonique de S^2 et $\tilde{\alpha}$ une fonction sur S^2. On peut modifier f de façon à pouvoir passer au quotient et trouver un difféomorphisme f de P_1^2 tel que $f^* g = \alpha \,.\, g_0$, $\alpha : P_1^2 \to \mathbf{R}$. Les deux v.r. (P_1^2, g) et $(P_1^2, \alpha \,.\, g_0)$ sont isométriques, donc ont même volumes et carcans. On est donc ramené en fait à deux s.r. g_0 et $\alpha \,.\, g_0$ sur P_1^2; maintenant $SO(3)$ agit sur (P_1^2, g_0) par isométries; on fait la moyenne par cette action et pour la mesure de Haar de $SO(3)$, de la fonction $\alpha^{1/2}$. Ceci donne une fonction $\bar{\alpha}$; la longueur d'une courbe c pour $\bar{\alpha} \,.\, g_0$ est la moyenne de la longueur des courbes $\gamma \circ c$ pour $\alpha \,.\, g_0$, γ parcourant $SO(3)$; donc $\mathrm{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \,.\, g_0) \geqq \mathrm{carc}(P_1^2, \alpha \,.\, g)$. L'inégalité de Schwarz (pour l'intégrale sur $SO(3)$) dit que $\mathrm{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} g_0) \leqq$ $\leqq \mathrm{surf}(P_1^2, \alpha \,.\, g_0)$. Donc $\mathrm{quot}(P_1^2, \bar{\alpha} \,.\, g_0) \leqq \mathrm{quot}(P_1^2, \alpha \,.\, g_0)$. Mais, en fait, $\bar{\alpha}$ est une constante, puisque $SO(3)$ agit transitivement sur P_1^2; donc $\mathrm{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} \,.\, g_0) = \bar{\alpha} \,.\, \mathrm{surf}(P_1^2, g_0)$ et $\mathrm{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \,.\, g_0) = (\bar{\alpha})^{1/2} \,.\, \mathrm{carc}(P_1^2, g_0)$. D'où la première partie du théorème; la seconde se montre en suivant les égalités à la trace dans les inégalités.

Remarques : (i): on peut considérer (4.3) comme une espèce d'inégalité isopérimétrique (isocarcanique!) entre surface et longueur, la longueur de la frontière étant remplacée ici par le carcan pour la variété sans bord P_1^2; (ii): (4.3) est une caractérisation plaisante de la s.r. canonique de P_1^2.

5. *Généralisations possibles.*

Pour n quelconque, on peut définir $\mathrm{carc}(P_1^n, g)$ exactement par la formule (4.1) et remplacer (4.2) par

$$\textbf{(5.1)} \qquad \mathrm{quot}(P_1^n, g) = \frac{\mathrm{vol}(P_1^n, g)}{(\mathrm{carc}(P_1^n, g))^n} \,.$$

On calcule encore avec (13.1): tableau. Par contre un analogue de (4.3) est complètement ouvert; on ne sait pas si $\mathrm{quot}(P_1^n, g) \geqq \mathrm{quot}(P_1^n, g_0)$ pour toute g (pour les variations conformes $\alpha \,.\, g_0$, c'est facile, démonstration analogue à celle de (4.3): voir [14]). A fortiori on ne sait pas si l'égalité est caractéristique de g_0. En fait on ne sait même pas si la borne inférieure $\inf_g \mathrm{quot}(P_1^n, g)$, pour g parcourant toutes les s.r. sur P_1^n, est strictement positive.

En fait on peut encore généraliser toutes ces questions aux P_i^n. Remarquons pour ce faire que, dans P_1^n, dire qu'une courbe c n'est pas homotope à zéro est équivalent à dire qu'elle est homotope à P_1^1, la droite projective pour l'inclusion héréditaire $P_1^1 \subset P_1^n$. On a aussi des inclusions $P_i^1 \subset P_i^n$ pour tout i. Posons donc:

$$(5.2)\quad \operatorname{carc}(P_i^n, g) = \inf_{Y \sim P_i^p} \operatorname{vol}(Y, g),\ \operatorname{quot}(P_i^n, g) = \frac{\operatorname{vol}(P_i^n, g)}{(\operatorname{carc}(P_i^n, g))^n}.$$

La question qui se pose d'abord est le calcul des quot (P_i^n, g_0); pour $i = 1$, c'est fait. Pour $i = 2, 4, 8$, voir le n° 6. Ensuite, introduisons les assertions:

(5.3) « I $(n;i)$ »: $\forall\, g$: quot $(P_i^n, \mathrm{g}) \geqq$ quot (P_i^n, g_0);

(5.4) « $IC(n;i)$ »: « $I(n;i)$ » et « quot $(P_i^n, g) =$ quot (P_i^n, g_0) entraîne (P_i^n, g) et (P_i^n, g_0) sont isométriques »;

(5.5) « $P(n;i)$ »: $\exists\, k > 0$ telle que $\forall\, g$: quot $(P_i^n, g) \geqq k$.

Voir le tableau, page 85.

6. *Le cas kählérien.*

Soit (M, g) une variété *hermitienne*, c'est-à-dire que M possède une structure analytique complexe, dont on notera J la multiplication par $(-1)^{1/2}$ sur le fibré réel TM, et que g commute avec $J: \forall\, x, y$: $g(J(x), J(y)) = g(x, y)$. On en déduit sur M une forme alternée de degré deux ω, par

(6.1) $\forall\, x, y : \omega(x, y) = g(x, J(y))$.

L'inégalité de Wirtinger ([7], p. 40) entraîne que si Y est une sous-variété compacte de dimension deux de M, alors

(6.2): vol $(Y, g) \geqq \int_Y \omega_Y$, *l'égalité ayant lieu si et seulement si* Y *est une sous-variété analytique complexe.*

Supposons de plus (M, g) kählérienne, c'est-à-dire $d\omega = 0$ (on appelle ω la forme de Kähler de (M, g)). Si Y et Z sont homotopes:

$$(6.3)\quad \int_Y \omega|_Y = \int_Z \omega|_Z$$

d'après la formule de Stokes.

Maintenant, (P_2^n, g_0) est kählérienne, pour la structure complexe canonique du projectif complexe $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$. D'après (6.2) et (6.3), quel que soit $Y \sim P_2^1$ et parce que $P_2^1 \subset P_2^n$ est une sous-variété analytique complexe, on a pour la forme de Kähler ω_0 de (P_2^n, g_0):

$$\operatorname{vol}(Y, g_0) \geqq \int_Y \omega_0|_Y = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \operatorname{vol}(P_2^1, g_0).$$

Ce qui démontre (voir (2.10)) que carc $(P_2^n, g_0) = \pi$, puis quot $(P_2^n, g_0) = \frac{1}{n!}$.

Soit maintenant g une s.r. kählérienne sur P_2^n telle que la forme de Kâhler associée ω vérifie $\omega = \omega_0 + d\alpha$, où $d\alpha$ est la différentielle extérieure d'une différentielle α de degré un. De telles s.r. existent: prendre une fonction $f: M \to \mathbf{R}$ et poser $\omega = \omega_0 + (-1)^{1/2}\delta\bar{\delta}f$; définir g par (6.1) à partir de ω. Pour f assez petite, g est encore définie positive. Pour toute variété hermitienne on a $v_g = \frac{1}{n!} \overset{n}{\wedge} \omega$, où n est la dimension complexe. On aura donc:

$$\mathrm{vol}\,(P_2^n, g) = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge}\, \omega = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge}\, \omega_0 = \mathrm{vol}\,(P_2^n, g_0)$$

d'après la formule de Stokes. Puis, pour $Y \sim P_2^1$:

$$\mathrm{vol}\,(Y, g) \geqq \int_Y \omega\big|_Y = \int_{P_2^1} \omega\big|_{P_2^1} = \int_{P_2^1} \omega_0\big|_{P_2^1} = \mathrm{carc}\,(P_2^n, g_0)$$

donc carc $(P_2^n, g) =$ carc (P_2^n, g_0). D'où quot $(P_2^n, g) =$ quot (P_2^n, g_0) pour toute g du type précédent; or en général (P_2^n, g) et (P_2^n, g_0) ne seront pas isométriques; ainsi « *IC* $(n;2)$ » est fausse.

La même méthode reste valable pour calculer quot (P_4^n, g_0) (resp. quot (P_8^2, g_0)). On considère cette fois-ci la forme canonique alternée de degré 4 (resp. 8) de P_4^n (resp. P_8^2); on aura carc $(P_4^n, g_0) =$ vol $(P_4^1, g_0) = \pi^2/6$, d'où quot (P_4^n, g_0) (voir tableau). De même: carc $(P_8^2, g_0) =$ vol $(P_8^1, g_0) =$ $=$ vol $(S^8, g_0/4) = \pi^4/8 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3$. (d'après (2.10)); d'où quot (P_8^2, g_0) (tableau). Par contre, on ne sait pas ce qu'il en est de « *IC* $(n;4)$ » ou « *IC* $(2;8)$ ».

7. *Théorèmes de Loewner, Blatter.*

La formule (4.1) peut encore servir à définir le carcan carc (M, g) de n'importe quelle variété riemannienne compacte, puis

(7.1)
$$\mathrm{quot}\,(M, g) = \frac{\mathrm{vol}\,(M, g)}{(\mathrm{carc}\,(M, g))^n}\,, \quad \mathrm{n} = \dim M.$$

Pour le tore de dimension deux $S^1 = S^1 \times S^1$, le résultat suivant a été obtenu avant celui de Pu:

(7.2): *théorème* (Loewner, [14]). *Pour toute* g: quot $(S^1 \times S^1, g) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$; *en outre* quot $(S^1 \times S^1, g) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *si et seulement si* $(S^1 \times S^1, g)$ *est isométrique à un tore équilatéral* (voir (2.4.2)).

TABLEAU

(on a posé $p) = (2p-1).(2p-3)\ldots\ldots 3.1)$

	$S^n = P^n_o$	P^2_1	$P^n_1 = P^n(\mathbf{R})\ (n \geqslant 3)$	P^n_2	P^n_4	P^2_8
vol $(P:; g_0)$	$n = 2p$: $2 . \dfrac{(2\pi)^p}{p)}$ $n = 2p+1$: $2 \dfrac{\pi^{p+1}}{p!}$	2π	$n = 2p$: $\dfrac{(2\pi)^p}{p)}$ $n = 2p+1$: $\dfrac{\pi^{p+1}}{p!}$ –	$\dfrac{\pi^n}{n!}$	$\dfrac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$	$\dfrac{\pi^8}{11.10.9.8.7.6.5.4}$
quot $(P:, g_0)$		$\dfrac{2}{\pi}$	$n = 2p$: $\dfrac{2^p}{p)}$ $n = 2p+1$: $\dfrac{\pi}{p!}$	$\dfrac{1}{n!}$	$\dfrac{6^n}{(2n+1)!}$	$\dfrac{7}{11}$
« $I(.\,;.)$ »		vraie	ouverte	ouverte	ouverte	ouverte
« $IC(.\,;.)$ »		vraie	ouverte	fausse	ouverte	ouverte
« $P(.\,;.)$ »		vraie	ouverte	ouverte	ouverte	ouverte

La démonstration démarre comme celle de (4.2), sauf qu'il n'y a même pas à prendre de revêtement. On aboutit à quot $(S^1 \times S^1, g) \geqq$ quot $(\mathbf{R}^2/G, g_0/G)$, quotient d'un tore plat associé au réseau G de $\mathbf{R}^2$. Il reste ensuite le problème de géométrie élémentaire: étudier les quotients des tores plats.

Soit G_q *la* surface compacte orientable à q trous (ou surface orientable de genre q, toutes ces surfaces sont difféomorphes à G_q).

(7.3): *théorème* (Blatter, [3]). *Pour tout* q *quelle que soit la* s.r. *sur* G_q: quot $(\mathrm{G}_q, \mathrm{g}) \geqq (\mathrm{t}_{2q})^{1/q}$ (*où les* t_n *sont ceux définis par* (7.4)).

La démonstration diffère radicalement de celles de (4.2) et (7.2); elle repose sur l'emploi des formes harmoniques; et l'on intègre sur leurs courbes de niveau.

Pour $q \geqq 2$, la situation diffère de celle de (7.2); les b_q sont bien les meilleures possibles: $b_q = \inf_{g \text{ s.r. sur } Gq}$ quot (G_q, g), mais cette borne n'est jamais atteinte si $q \geqq 2$ ([1], p. 309).

Une bonne généralisation naturelle est de se demander si

$$\textbf{(7.4)} \qquad \forall g: \text{quot}\,((S^1)^n, g) \geqq \inf_{G \text{ réseau de } \mathbf{R}^n} \text{quot}\,(\mathbf{R}^n/G, g_0/G) = t_n.$$

Non seulement cette question est ouverte, mais en outre les nombres arithmétiques t_n ne sont pas connus, sauf pour $2 \leqq n \leqq 8$ (voir [5], p. 332). On sait aussi que $t_n > 0$ et est réalisée effectivement: [5], corollary, p. 143. Enfin que t_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini: [5], p. 247.

Enfin, on voit bien quel est le problème type dont ceux qui précèdent ne sont que des cas particuliers; soit M une variété C^∞ compacte et $\alpha, \beta, \ldots$ différentes classes d'homologie, d'homotopie (libre) de M. Pour toute telle classe on définit, pour toute s.r. g sur M:

$$\textbf{(7.5)} \qquad \alpha(g) = \inf_{Y \in \alpha} \text{vol}\,(Y, g)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les sous-variétés Y de M qui appartiennent à la classe α considérée. Remarquons en passant que l'on ne se préoccupe pas de la réalisation de $\alpha(g)$ par une sous-variété Y; mais ce n'est pas par manque d'intérêt! Le problème général est: existe-t-il, sur certaines variétés, des relations entre $\alpha(g)$, $\beta(g)$, ..., indépendantes de la s.r. g sur M? Le théorème de Pu est relatif au cas où α est la classe fondamentale (de dimension deux) de $P_1^2 = M$ et β la classe des droites projectives; on a $\alpha(g) \geqq \frac{2}{\pi}(\beta(g))^2$ pour toute g. Le théorème de Loewner montre, en tout cas, que si M, N sont deux variétés compactes, et si α (resp. β) est la classe d'homotopie de $M \times N$ qui représente M (resp. N), alors on n'a pas en général: $\mathrm{vol}\,(M \times N, g) \geqq \alpha(g)\,.\,\beta(g)$ pour toute g. Voir aussi [11′].

Géodésiques.

8. *Définition.*

Après les volumes, les invariants riemanniens qui se présentent naturellement sont les géodésiques. Sur la v.r. (M, g) posons, pour deux points $m, n \in M$:

(8.1) $$d(m, n) = \inf_c \mathrm{long}\,(c, g)$$

(où la longueur est celle définie en (3.5) et la borne est inférieure est prise sur l'ensemble des courbes d'extrémités m, n).

On montre ([13], p. 62; [12], p. 166 toutes les références [12] réfèrent au vol. I de cet ouvrage, [1], p. 225) que d est une distance sur M; ainsi (M, g) est canoniquement un espace métrique. En outre la topologie de variété de M coincide avec la topologie de cette métrique ([13], p. 62; [12], p. 166; [1], p. 226). Les géodésiques de (M, g) sont les courbes de classe C^1 qui localement réalisent cette distance et sont à vitesse constante i.e. $c : I \to M$ (I intervalle de $\mathbf{R}$) est une géodésique si $|c'|$ est constante et si $\forall\, t \in I\, \exists\, t' >$ $> t$, $t' \in I$, tel que $\mathrm{long}\,(c|_{[t,t']}, g) = d(c(t), c(t'))$.

Pour $(\mathbf{R}^n, g_0)$ les géodésiques sont les droites (parcourues uniformément); pour une surface $S \subset \mathbf{R}^3$, ce sont les courbes dont l'accélération est normale à S.

On ne peut guère travailler qu'avec des v.r. *complètes*, c'est-à-dire complètes pour la distance (8.1). On démontre ([13], p. 62; [12], p. 172; [1], p. 235) que si (M, g) est complète:

(8.2) $\forall\, m, n \in M\, \exists\, c$, courbe d'extrémités m, n, telle que $\mathrm{long}\,(c, g) = d(m, n)$;

(8.3) $\forall\, x \in TM$ il existe une géodésique unique c: $\mathbf{R} \to M$ telle que $c'(0) = x$.

Remarques :

(8.4): la courbe dont l'existence est affirmée en (8.2) est toujours une géodésique; une telle courbe n'est pas unique en général: voir (9.2) et prendre sur (S^n, g_0) deux points m, n antipodes. Par contre on démontre