4. Permutations et graphes.

peu plus délicat, on montre que dans le passage de D à sD, il y a permutation des facteurs et $N(s)$ changements de signe, d'où $sD = (-1)^{N(s)}D$.

C) Dans la méthode précédente, tant les variables $x_1, ..., x_n$ que les fonctions f jouent un rôle assez fictif. On peut en présenter une variante plus « économique » de la manière suivante. A chaque permutation s de rang n, on associe l'entier $\Pi(s) = \prod_{i<j} (s(j)-s(i))$. On remarque ensuite que, la permutation s étant fixée, toute partie à deux éléments de l'ensemble $X = \{1, 2, ..., n\}$ se représente de manière unique sous la forme $\{s(i), s(j)\}$ avec $i < j$; de plus, $|k-l|$ ne dépend évidemment que de la *partie* $\{k,l\}$. Par suite $|\Pi(s)| = \prod_{i<j} |s(i)-s(j)|$ est égal à $\prod_{\{k,l\}} |k-l| = \prod_{k<l} (l-k) = D$. De plus, dans le produit définissant $\Pi(s)$, les facteurs négatifs correspondent exactement aux inversions de la suite $s(1), ..., s(n)$. On en conclut

(9) $$\Pi(s) = \alpha(s) \cdot D\,.$$

On considère ensuite deux permutations s et t. Dans le produit

$$\frac{\Pi(st)}{\Pi(t)} = \prod_{i<j} \frac{s(t(j)) - s(t(i))}{t(j) - t(i)},$$

chaque facteur est invariant par l'échange de i et j, et ne dépend donc que de la *partie* $\{t(i), t(j)\}$. On a donc

$$\frac{\Pi(st)}{\Pi(t)} = \prod_{\{k,l\}} \frac{s(l) - s(k)}{l-k} = \prod_{k<l} \frac{s(l) - s(k)}{l-k} = \frac{\Pi(s)}{D} = \alpha(s),$$

c'est-à-dire

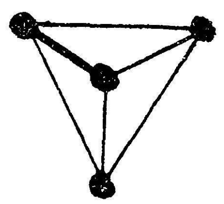
(10) $$\Pi(st) = \alpha(s)\,\Pi(t).$$

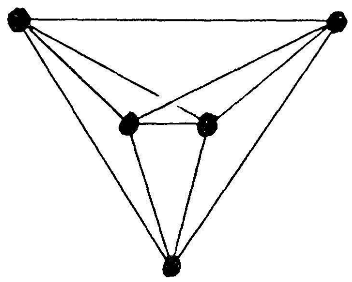
De (9) et (10), on déduit $\alpha(st).D = \Pi(st) = \alpha(s).\Pi(t) = \alpha(s)\alpha(t).D$, d'où $\alpha(st) = \alpha(s)\alpha(t)$ puisque D est non nul. On prouve ensuite que le nombre d'inversions de π_i est égal à 1, d'où $\alpha(\pi_i) = -1$. Comme on l'a déjà remarqué, cela suffit à montrer qu'une permutation ne peut être à la fois paire et impaire.

4. *Permutations et graphes.*

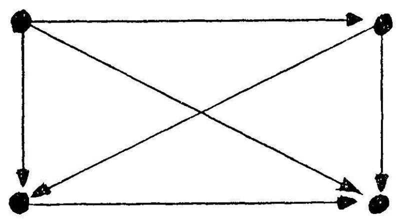
Comme J. L. Koszul me l'a fait plusieurs fois remarquer, l'inconvénient de la définition de la signature au moyen du nombre d'inversions est de dépendre étroitement de la relation d'ordre entre entiers; de même, les transpositions π_i de deux entiers consécutifs jouent un rôle privilégié dans les démonstrations précédentes. Or, on a souvent besoin d'utiliser les permutations d'un ensemble fini X non numéroté à l'avance. Pour pouvoir définir le nombre d'inversions d'une permutation s de X, il faut choisir une énumération de X, ou ce qui revient au même une relation d'ordre total sur X. Le nombre d'inversions $N(s)$ dépend de ce choix, mais comme on le constate *a posteriori*, la parité de $N(s)$ a un caractère intrinsèque.

Pour répondre à cette objection, on peut présenter l'élaboration suivante de la méthode des inversions; l'idée en est qu'il suffit d'orienter les parties à deux éléments pour définir les inversions. Nous adoptons un mode d'exposition fondé sur la notion de *graphe*. Soit donc X un ensemble fini à n éléments, que nous représentons par des points d'un plan appelés *sommets*. Deux sommets distincts sont joints par un *arc*, comme dans les deux figures suivantes, qui correspondent aux cas $n = 4$ et $n = 5$.





La figure ainsi obtenue s'appelle d'ordinaire le *graphe complet à n sommets*. Orienter un tel graphe consiste à choisir sur chaque arc un sens de parcours, représenté par une flèche dans l'exemple suivant:



Les arcs du graphe correspondent aux *parties* à deux éléments de X et orienter le graphe consiste à choisir dans chaque partie à deux éléments un premier et un deuxième élément. Il revient au même de dire qu'une *orientation* est un ensemble o de couples ordonnés (i, j) formés d'éléments distincts de X, tel que l'on ait, soit $(i, j) \in o$, soit $(j, i) \in o$ pour deux éléments distincts i et j de X. Une permutation s de X transforme l'orientation o en une nouvelle orientation so qui se compose des couples $(s(i), s(j))$ avec (i, j) dans o. De manière intuitive, s définit un réarrangement des sommets du graphe qui entraîne un réarrangement des arcs, et l'on transporte avec chaque arc son orientation.

Soient o et o' deux orientations; soit m le nombre des arcs qui ont des orientations distinctes par rapport à o et o', c'est-à-dire le nombre des couples qui appartiennent à o', mais non à o; on pose $d(o, o') = (-1)^m$. Le formulaire suivant s'établit par des raisonnements élémentaires (²)

$$d(o, o) = 1 \tag{11}$$

$$d(o, o') = d(o', o) \tag{12}$$

$$d(o, o')\, d(o', o'') = d(o, o'') \tag{13}$$

$$d(so, so') = d(o, o'). \tag{14}$$

On peut alors prouver que $d(o, so)$ est indépendant de l'orientation o choisie; en effet, si o et o' sont deux orientations, on a

$$\begin{aligned} d(o', so') &= d(o', o)\, d(o, so)\, d(so, so') && \text{d'après (13)} \\ &= d(o, o')\, d(o, so)\, d(o, o') && \text{d'après (12) et (14)} \\ &= d(o, so) && \text{car } d(o, o')^2 = 1. \end{aligned}$$

A toute permutation s de X, on fait correspondre alors le nombre $\alpha(s)$ qui est égal à $d(o, so)$ pour toute orientation o. Si s et t sont deux permutations, on a

$$\alpha(st) = d(o, sto) = d(o, to)\, d(to, s(to)) = \alpha(t)\, \alpha(s)\,.$$

Pour calculer $\alpha(s_{ab})$, nous choisissons une orientation o convenable; on oriente l'arc ab de a vers b, chaque arc ax de a vers x, chaque arc bx de b vers x et les autres arcs de manière arbitraire. Le seul effet de la transposition s_{ab} est de changer l'orientation de l'arc ab, d'où $\alpha(s_{ab}) = -1$.

On peut donc définir la signature de s comme le nombre $\alpha(s)$. Supposons en particulier que X soit l'ensemble des entiers $1, 2, ..., n$ et prenons pour o l'ensemble des couples (i, j) avec $i < j$; alors so se compose des couples de la forme $(s(i), s(j))$ avec $i < j$; les éléments de so qui n'appartiennent pas à o sont donc les couples $(s(i), s(j))$ avec $i < j$ et $s(i) > s(j)$ et leur nombre est égal à $N(s)$. On retrouve donc la définition de la signature comme égale à $(-1)^{N(s)}$.

5. *Autres méthodes.*

On peut aussi utiliser les *cycles* d'une permutation pour définir sa signature ([6], chap. 8). Soit $c(s)$ le nombre de cycles de la permutation s de rang n; les définitions usuelles de la signature permettent de prouver qu'elle

---

²) On pourra consulter la note [4] pour des considérations plus générales.