4. Autres théorèmes

3.4.2. Si $C = 0$, ceci implique que f possède une valeur moyenne nulle.

On voit donc que, pour établir le résultat annoncé, il ne reste plus qu'à montrer que l'on a

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m,n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}} = 0$$

si, et seulement si,

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) = 0.$$

Compte tenu de (14), il suffit de montrer que

$$\prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{j(1+ia_1)}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{k(1+ia_2)}} \right] \right\} = 0$$

si, et seulement si,

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} = 0.$$

Ceci résulte immédiatement de ce que tous les facteurs du produit autres que celui qui correspond à $p = 3$ sont non nuls.

En effet, on a pour chaque p

$$\left| \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k>0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right| \leqslant \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k>0}} \frac{1}{p^{j+k}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} - 1.$$

Pour $p > 3$, ceci est < 1 et par suite

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} = 1 + \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k>0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \neq 0.$$

4. Autres théorèmes

Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce qui suit, f est une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à $|f(m,n)| \leqslant 1$ quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Le théorème démontré au chapitre précédent fournit immédiatement des conditions nécessaires et suffisantes pour que f possède une valeur moyenne nulle, car il est clair que, lorsque l'on a (6), le module de l'expression

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tend vers $|C|$ quand x et y tendent vers $+\infty$.

Nous nous proposons maintenant d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que f possède une valeur moyenne non nulle.

Nous chercherons aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tende vers une limite lorsque x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe quelconque, cette limite étant indépendante de la valeur du rapport.

Compte tenu de la remarque faite plus haut sur le cas où l'on a (6), on voit que ceci a lieu avec une limite nulle si, et seulement si, f possède une valeur moyenne nulle. Il reste à traiter le cas d'une limite non nulle.

4.1. Remarquons d'abord que le produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$$

est convergent si, et seulement si, la série

$$\sum \frac{1}{p} [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$$

est convergente [1].

---

[1]) Rappelons que le produit infini $\prod_{1}^{+\infty} (1 + u_n)$ est dit convergent si

1° il a au plus un nombre fini de facteurs nuls;

2° le produit $\prod_{\substack{n \leq x \\ 1 + u_n \neq 0}} (1 + u_n)$ tend vers une limite finie non nulle quand x tend vers $+\infty$.

Quant le produit infini est convergent, sa valeur est par définition la limite de $\prod_{n \leq x} (1 + u_n)$ pour x tendant vers $+\infty$. Elle est nulle si, et seulement si, un au moins des facteurs est nul.

On voit facilement que, si la série $\sum_{1}^{+\infty} |u_n|^2$ est convergente, le produit infini $\prod_{1}^{+\infty} (1 + u_n)$ est convergent ou non en même temps que la série $\sum_{1}^{+\infty} u_n$.

(Cf, par exemple, Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Rehien).

En effet, si l'on pose

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} = 1+u_p,$$

on voit que l'on a quand p tend vers $+\infty$

$$u_p = \frac{1}{p}\left[f(p, 1)+f(1, p) - 2\right] + 0\left[\frac{1}{p^2}\right].$$

La série $\Sigma \mid u_p \mid^2$ étant convergente, puisque $u_p = 0\left[\frac{1}{p}\right]$, le produit infini $\Pi\,(1+u_p)$ est convergent si, et seulement si, la série $\Sigma\, u_p$ est convergente, ce qui donne le résultat annoncé.

Ajoutons que le produit infini

$$\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right),$$

lorsqu'il est convergent, est nul si, et seulement si,

$$\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right)\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) = 0,$$

car, pour $p > 3$,

$$\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \neq 0 \quad \text{puisque} \quad \left|\sum_{\substack{j,k\geq 0\\ j+k>0}} \frac{f(p^j,p^k)}{p^{j+k}}\right| \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2} -1 < 1.$$

4.2. Ceci dit, nous allons montrer d'abord que, pour que f possède une valeur moyenne non nulle, il faut et il suffit que

1° Les séries $\sum \frac{1}{p}\,[1-f(p, 1)]$ et $\sum \frac{1}{p}\,[1-f(1, p)]$ soient convergentes;

2° on ait $\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right)\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) \neq 0.$

Plus précisément, nous établirons le théorème suivant.

THÉORÈME 2: I. *Si f possède une valeur moyenne non nulle, les séries* $\sum \frac{1}{p}\,[1-f(p, 1)]$ *et* $\sum \frac{1}{p}\,[1 - f(1, p)]$ *sont convergentes et on a*

$$\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right)\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) \neq 0. \tag{23}$$

II. *Si les séries* $\sum \frac{1}{p}[1 - f(p, 1)]$ *et* $\sum \frac{1}{p}[1 - f(1, p)]$ *sont convergentes,* M (f) *existe et est égale à la valeur du produit infini*

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$$

(qui est convergent d'après ce que l'on a vu au paragraphe 4.1, et est nul si, et seulement si, on a

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right)\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) = 0).$$

4.2.1. Supposons d'abord que f possède une valeur moyenne non nulle.

Il existe nécessairement a_1 et a_2 réels tels que l'on ait

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\,[f(p, 1)\, p^{-ia_1}]\} < +\infty \tag{24}$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\,[f(1, p)\, p^{-ia_2}]\} < +\infty, \tag{25}$$

car, dans le cas contraire, f devrait possèder une valeur moyenne nulle.

Pour la même raison, on a

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}}\right)\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}}\right) \neq 0. \tag{26}$$

On a donc (6).

Il résulte de (6) que, lorsque x et y tendent vers $+\infty$,

$$Cx^{ia_1}\, y^{ia_2}\, L_1(\log x)\, L_2(\log y)$$

tend vers $M(f)$.

Ceci entraîne que, quels que soient λ et $\mu > 0$,

$$C(\lambda x)^{ia_1}(\mu y)^{ia_2}\, L_1(\log \lambda x)\, L_2(\log \mu y)$$

tend aussi vers $M(f)$.

Mais le quotient de la deuxième expression par la première tend vers $\lambda^{ia_1}\mu^{ia_2}$.

On doit donc avoir

$$\lambda^{ia_1}\mu^{ia_2} = 1 \quad \text{quels que soient } \lambda \text{ et } \mu > 0,$$

ce qui nécessite $a_1 = a_2 = 0$.

Alors (26) donne (23), (24) et (25) donnent

$$\sum \frac{1}{p} \{1-\Re e\,[f(p,1)]\} < +\infty \tag{27}$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1-\Re e\,[f(1,p)]\} < +\infty, \tag{28}$$

et on voit que, quand x et y tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre,

$$L_1(\log x)\, L_2(\log y) \quad \text{tend vers } \frac{M(f)}{C}$$

(qui est de module 1 puisque $|L_1(\log x)\, L_2(\log y)| = 1$ pour x et $y \geqslant 1$).

Alors, à tout $\varepsilon > 0$ et $< 2\pi - \frac{1}{2}$ correspond $X_\varepsilon \geqslant 2$ tel que, pour x', x'', y' et $y'' \geqslant X_\varepsilon$,

$$|L_1(\log x'')\, L_2(\log y'') - L_1(\log x')\, L_2(\log y')| \leqslant 2 \sin \frac{\varepsilon}{4}.$$

En prenant $y' = y'' = X_\varepsilon$, on voit que l'on a

$$|L_1(\log x'') - L_1(\log x')| \leqslant 2 \sin \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour } x' \text{ et } x'' \geqslant X_\varepsilon, \tag{29}$$

et, en prenant $x' = x'' = X_\varepsilon$, on voit que l'on a

$$|L_2(\log y'') - L_2(\log y')| \leqslant 2 \sin \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour } y' \text{ et } y'' \geqslant X_\varepsilon. \tag{30}$$

Si l'on pose, pour x et $y \geqslant 1$,

$$A_1(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} Im\,[f(p,1)]$$

et

$$A_2(y) = \sum_{p \leq y} \frac{1}{p} Im\,[f(1,p)],$$

(29) et (30) s'écrivent

$$|\exp[iA_1(x'')] - \exp[iA_1(x')]| \leqslant 2 \sin \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour } x' \text{ et } x'' \geqslant X_\varepsilon \tag{31}$$

et

$$\left| \exp [iA_2(y'')] - \exp [iA_2(y')] \right| \leqslant 2 \sin \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{pour } y' \text{ et } y'' \geqslant X_\varepsilon. \quad (32)$$

En prenant $x' = X_\varepsilon$ et $x'' = x$, on déduit de (31) que, pour $x \geqslant X_\varepsilon$, $A_1(x)$ appartient à l'un des intervalles $[A_1(X_\varepsilon) + 2k\pi - \frac{\varepsilon}{2}, A_1(X_\varepsilon) + 2k\pi + \frac{\varepsilon}{2}]$, où $k \in \mathbf{Z}$.

La différence de deux nombres appartenant à deux de ces intervalles distincts est au moins égale à $2\pi - \varepsilon > \frac{1}{2}$.

Comme on a évidemment

$$\left| A_1(x'') - A_1(x') \right| \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad 2 \leqslant x' < x'' \leqslant x' + 2,$$

l'intervalle auquel appartient $A_1(x)$ est le même pour tous les $x > X_\varepsilon$ que pour $x = X_\varepsilon$, c'est-à-dire celui qui correspond à $k = 0$.

On a donc $\left| A_1(x) - A_1(X_\varepsilon) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tour $x \geqslant X_\varepsilon$, et par suite

$$\left| A_1(x'') - A_1(x') \right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour} \quad x' \text{ et } x'' \geqslant X_\varepsilon.$$

Il résulte de là que $A_1(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum \frac{1}{p} Im [f(p, 1)]$ est convergente.

On déduit de même de (32) que l'on a

$$\left| A_2(y'') - A_2(y') \right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour} \quad y' \text{ et } y'' \geqslant X_\varepsilon,$$

et il en résulte que $A_2(y)$ tend vers une limite finie quand y tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum \frac{1}{p} Im [f(1, p)]$ est convergente.

Avec (27) et (28), ceci montre que les séries

$$\sum \frac{1}{p} [1 - f(p, 1)] \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{p} [1 - f(1, p)]$$

sont convergentes.

La première partie du théorème 2 est ainsi démontrée.

4.2.2. Supposons maintenant que les séries

$$\sum \frac{1}{p} [1 - f(p, 1)] \text{ et } \sum \frac{1}{p} [1 - f(1, p)]$$

soient convergentes.

Ceci entraîne que l'on a (27) et (28). Autrement dit, on a (24) et (25) avec $a_1 = a_2 = 0$.

Si l'on a

$$\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right)\left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) = 0.$$

f possède une valeur moyenne nulle.

Si au contraire on a (32), on a quand x et y tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m\leq x \\ n\leq y}} f(m, n) = C L_1(\log x) L_2(\log y) + o[1], \tag{33}$$

où C est une constante complexe non nulle,

$$L_1(t) = \exp\{i \sum_{p\leq e^t} \frac{1}{p} Im[f(p, 1)]\}$$

et

$$L_2(t) = \exp\{i \sum_{p\leq e^t} \frac{1}{p} Im[f(1, p)]\}.$$

Les séries

$$\sum \frac{1}{p} Im[f(p, 1)] \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{p} Im[f(1, p)]$$

étant convergentes, $L_1(t)$ et $L_2(t)$ tendent vers des limites finies, d'ailleurs de module 1, lorsque t tend vers $+\infty$. Alors (33) montre que f possède une valeur moyenne (de module égal à C).

Pour achever la démonstration de la deuxième partie du théorème 2, il reste à montrer que $M(f)$ est égale à la valeur du produit infini

$$\prod \left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right).$$

Pour cela, reportons-nous à la démonstration du théorème 1 donnée au chapitre 3.

Puisque l'on a (27) et (28), on est dans le cas considéré au paragraphe 3.4, avec $a_1 = a_2 = 0$.

(19) et (20) donnent dans ce cas

$$\frac{1}{x} H_1(x) = C_1 L_1(\log x) + o[1] \tag{34}$$

et

$$\frac{1}{x} H_2(x) = C_2 L_2(\log x) + o[1]. \tag{35}$$

On sait que la constante C qui figure dans (6), réduit ici à (33), est donnée par

$$C = C_1 C_2 \sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m n}.$$

(33) peut donc s'écrire

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = C_1 C_2 \left(\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m n} \right) L_1(\log x) L_2(\log y) + o[1],$$

et on voit que l'on a pour x tendant vers $+\infty$

$$\frac{1}{x^2} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq x}} f(m, n) = C_1 C_2 \left(\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m n} \right) L_1(\log x) L_2(\log x) + o[1]. \tag{36}$$

Mais, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.1.1, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} H_1(x) &= \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h_1(p^r)}{p^r}\right] + o[1] \\ &= \tfrac{1}{2} \prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^j}\right) + o[1] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} H_2(x) &= \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h_2(p^r)}{p^r}\right] + o[1] \\ &= \tfrac{1}{2} \prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^k}\right) + o[1]. \end{aligned}$$

En comparant avec (34) et (35), on voit que l'on a

$$C_1 L_1(\log x) = \tfrac{1}{2} \prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^j}\right) + o[1] \tag{37}$$

et

$$C_2 L_2(\log x) = \tfrac{1}{2} \prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^k}\right) + o[1]. \tag{38}$$

Les produits sont de module au plus égal à 1 car on a pour chaque p

$$\left|\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^j}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p^j} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

et

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

D'autre part, (14) donne

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m,n)}{mn} = \left\{\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right\} \prod_{p>2} \left\{\left[\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right] \middle/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^j}\right]\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^k}\right]\right\}$$

$$= \left\{\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right\} \prod_{2<p\leq x} \left\{\left[\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right] \middle/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^j}\right]\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^k}\right]\right\} + o[1].$$

Avec (37) et (38), ceci montre que (36) peut s'écrire

$$\frac{1}{x^2} \sum_{\substack{m\leq x\\ n\leq x}} f(m,n) = \prod_{p\leq x} \left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right) + o\,[1], \tag{39}$$

ce qui donne le résultat voulu.

Remarquons en passant que la démonstration de (39) a utilisé uniquement le fait que l'on a (27) et (28).

4.3. Convenons maintenant de dire que f possède une « valeur moyenne faible » si l'expression

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m\leq x\\ n\leq y}} f(m,n)$$

tend vers une limite quand x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe, cette limite étant indépendante de la valeur du rapport. La valeur moyenne faible de f sera la limite en question.

Il est clair que, si f possède une valeur moyenne, elle possède aussi une valeur moyenne faible égale à sa valeur moyenne ordinaire.

Comme on l'a vu au début de ce chapitre, f possède une valeur moyenne faible nulle si, et seulement si, elle possède une valeur moyenne nulle.

Nous allons montrer maintenant que, pour que f possède une valeur moyenne faible non nulle, il faut et il suffit que

1° la série $\sum \frac{1}{p} [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$ soit convergente;

2° on ait $\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right)\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) \neq 0$ [1)]

Plus précisément, nous établirons le théorème suivant.

THÉORÈME 3: I. *S'il existe trois nombres strictement positifs distincts* ρ_1, ρ_2 *et* ρ_3 *tels que le rapport* $\left(\log \frac{\rho_3}{\rho_1}\right) \Big/ \left(\log \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$ *soit irrationnel et tels que, pour* $j = 1$, $j = 2$ *et* $j = 3$, *l'expression*

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tende vers une même limite non nulle quand x *et* y *tendent vers* $+\infty$ *avec* $\frac{y}{x} = \rho_j$ [2)] *la série*

$$\sum \frac{1}{p} [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$$

est convergente et on a (23).

[1)] On pourrait dire aussi qu'il faut et il suffit que le produit infini

$$\Pi \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \right)$$

soit convergent et non nul.

[2)] Cette hypothèse pourrait aussi se formuler de la façon suivante:
Il existe trois couples de nombres strictement positifs (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \log \alpha_1 & \log \beta_1 & 1 & r_1 \\ \log \alpha_2 & \log \beta_2 & 1 & r_2 \\ \log \alpha_3 & \log \beta_3 & 1 & r_3 \end{vmatrix}$$

soit non nul quels que soient r_1, r_2 et $r_3 \in \mathbf{Z}$ et ne satisfaisant pas à $r_1 = r_2 = r_3$, et tels que, pour $j = 1$, $j = 2$ et $j = 3$, l'expression

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tende vers une même limite non nulle quand x et y tendent vers $+\infty$ avec $\frac{x}{\alpha_j} = \frac{y}{\beta_j}$.

La manière dont le résultat se généralise pour les fonctions de $\mathcal{M}_q$, où $q > 2$, est visible sous cette forme.

II. *Si la série* $\sum \frac{1}{p}\,[2 - f(p, 1) - f(1, p)]$ *est convergente, l'expression*

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tend vers la valeur du produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$$

quand x *et* y *tendent vers* $+\infty$ *de façon que les rapports* $\frac{\log y}{\log x}$ *et* $\frac{\log x}{\log y}$ *restent bornés* [1].

4.3.1. Supposons d'abord que $\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$ tende vers une limite l non nulle [2] quand x et y tendent vers $+\infty$ avec $\frac{y}{x} = \rho$.

Tout d'abord, comme au paragraphe 4.2.1, on est nécessairement dans le cas où il existe a_1 et a_2 réels tels que l'on ait (24) et (25), puisque, dans le cas contraire, $\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$ devrait tendre vers zéro quand x et y tendent vers $+\infty$.

Pour la même raison, on a (26).

On a donc (6).

Compte tenu de (6), il résulte de notre hypothèse que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$Cx^{ia_1} (\rho x)^{ia_2} L_1 (\log x) L_2 (\log \rho x) \quad \text{tend vers } l.$$

Ceci entraine que, quel que soit $\lambda > 0$,

$$C (\lambda x)^{ia_1} (\rho \lambda x)^{ia_2} L_1 (\log \lambda x) L_2 (\log \rho \lambda x) \quad \text{tend aussi vers } l.$$

Mais le quotient de la deuxième expression par la première tend vers $\lambda^{i(a_1 + a_2)}$.

On doit donc avoir $\lambda^{i(a_1 + a_2)} = 1$ pour tout $\lambda > 0$, ce qui nécessite $a_1 + a_2 = 0$.

Alors on voit que, quand x tend vers $+\infty$,

---

[1]) Il convient de se rappeler ce qui a été dit à la fin du paragraphe 4.1.

[2]) l est nécessairement finie, et même de module $\leqslant 1$, puisque c'est la limite d'une quantité qui est visiblement de module $\leqslant 1$.

$$C\rho^{ia_2} L_1 (\log x) L_2 (\log \rho x) \quad \text{tend vers } l.$$

4.3.2. Supposons maintenant qu'il existe trois nombres strictement positifs distincts ρ_1, ρ_2 et ρ_3 tels que le rapport $\left(\log \frac{\rho_3}{\rho_1}\right) \Big/ \left(\log \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$ soit irrationnel et tels que, pour $j = 1$, $j = 2$ et $j = 3$, $\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$ tende vers $l \neq 0$ quand x et y tendent vers $+\infty$ avec $\frac{y}{x} = \rho_j$.

Alors, d'après ce qui précède, on est dans le cas où il existe a_1 et a_2 réels tels que l'on ait (24) et (25) et on a (26), de sorte que l'on a (6), et en outre on a $a_1 + a_2 = 0$ et, quand x tend vers $+\infty$,

$$C\rho_j^{ia_2} L_1 (\log x) L_2 (\log \rho_j x) \quad \text{tend vers } l \text{ pour } j = 1, 2, 3.$$

En considérant des quotients, on voit que

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{ia_2} = \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^{ia_2} = 1.$$

Autrement dit, il existe k_2 et $k_3 \in \mathbf{Z}$ tels que

$$a_2 \log \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2k_2\pi \quad \text{et} \quad a_2 \log \frac{\rho_3}{\rho_1} = 2k_3\pi.$$

Si a_2 n'était pas nul, k_1 et k_2 ne le seraient pas et on aurait $\left(\log \frac{\rho_3}{\rho_1}\right) \Big/ \left(\log \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{k_3}{k_2}$, contrairement à l'hypothèse que ce rapport est irrationnel.

On a donc $a_2 = 0$, et par suite aussi $a_1 = 0$.

Alors (26) donne (23); (24) et (25) donnent (27) et (28); (6) se réduit à (33). De plus, on voit que, quand x tend vers $+\infty$,

$$C L_1 (\log x) L_2 (\log \rho_j x) \quad \text{tend vers } l,$$

et par suite

$$C L_1 (\log x) L_2 (\log x) \quad \text{tend vers } l.$$

(33) montre que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{x^2} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq x}} f(m, n) = C L_1 (\log x) L_2 (\log x) + o\,[1].$$

Donc $\dfrac{1}{x^2} \sum\limits_{\substack{m \leq x \\ n \leq x}} f(m, n)$ tend vers l.

Mais, d'après la remarque de la fin du paragraphe 4.2.2, on a (39) puisque l'on a (27) et (28).

On voit ainsi que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right) \quad \text{tend vers } l.$$

Le produit infini $[\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum\limits_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$ est donc convergent, et par conséquent la série $\sum \frac{1}{p}\, [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$ est convergente d'après ce qui a été dit au paragraphe 4.1.

La première partie du théorème 3 est ainsi complètement démontrée.

4.3.3. Supposons maintenant que la série

$$\sum \frac{1}{p}\, [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$$

soit convergente.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 4.1, ceci entraine que le produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$$

est convergent.

De plus, on a $\sum \frac{1}{p} \{2 - \Re e\, [f(p, 1)] - \Re e\, [f(1, p)]\} < +\infty$, ce qui entraine évidemment (27) et (28).

Autrement dit, on a (24) et (25) avec $a_1 = a_2 = 0$.

Si l'on a

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) = 0,$$

f possède une valeur moyenne nulle et le produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$$

est nul, et l'on a bien le résultat voulu.

Si, au contraire, on a (23), quand x et y tendent vers $+\infty$, on a (33), où C est une constante complexe non nulle et les fonctions L_1 et L_2 sont données par les formules indiquées au paragraphe 4.2.2.

D'après les propriétés de L_1 et L_2, si x et y tendent vers $+\infty$ de façon que les rapports $\dfrac{\log y}{\log x}$ et $\dfrac{\log x}{\log y}$ restent bornés, on a

$$L_2(\log y) = L_2(\log x) + o\,[1]$$

et (33) donne

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = C L_1(\log x) L_2(\log x) + o\,[1].$$

Mais on a pour $x \geqslant 1$

$$L_1(\log x) L_2(\log x) = \exp\left\{ i \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} (Im\,[f(p, 1)] + Im\,[f(1, p)]) \right\}$$

et la série

$$\sum \frac{1}{p} \{ Im\,[f(p, 1)] + Im\,[f(1, p)] \}$$

est évidemment convergente.

Si S est la somme de cette série, $L_1(\log x) L_2(\log x)$ tend vers e^{iS} quand x tend vers $+\infty$.

On voit alors que $\dfrac{1}{xy} \sum\limits_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$ tend vers Ce^{iS} quand x et y tendent vers $+\infty$ de façon que les rapports $\dfrac{\log y}{\log x}$ et $\dfrac{\log x}{\log y}$ restent bornés.

Pour achever de démontrer la deuxième partie du théorème 3, il ne reste plus qu'à montrer que cette limite Ce^{iS} est égale à la valeur du produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j, k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \right).$$

Ceci résulte de ce que, d'après la remarque de la fin du paragraphe, on a (39) puisque l'on a (27) et (28).

4.4. Pour terminer, indiquons deux résultats particuliers qui nous paraissent intéressants.

THÉORÈME 4: *S'il existe* K > 0 *tel que l'on ait pour tout p*

$$|\, Im f(p, 1) \,| \leqslant K\,[1-\Re e f(p, 1)] \quad et \quad |\, Im f(1, p) \,| \leqslant K\,[1-\Re e f(1, p)],$$

f possède une valeur moyenne.

M (f) *est nulle si, et seulement si, on a*

$$\sum \frac{1}{p}\,[2-\Re e f(p, 1) - \Re e f(1, p)] = +\infty$$

ou

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right)\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) = 0.$$

THÉORÈME 5: *Si l'on a, quand* x *tend vers* $+\infty$, *l'une ou l'autre des relations*

$$\sum_{p \leq x} f(p, 1) \log p = \rho x + o\,[x] \tag{40}$$

et

$$\sum_{p \leq x} f(1, p) \log p = \rho x + o\,[x], \tag{41}$$

avec $\rho \neq 1$, *f possède une valeur moyenne nulle.*

Le résultat subsiste avec $\rho = 1$ *à condition d'ajouter la condition*

$$\sum \frac{1}{p}\,[1-\Re e f(p, 1)] = +\infty$$

dans le cas ou l'on a (40), *et la condition*

$$\sum \frac{1}{p}\,[1-\Re e f(1, p)] = +\infty$$

dans le cas ou l'on a (41).

Ces deux théorèmes peuvent être déduits de la première partie du théorème 1, tel qu'il est énoncé au paragraphe 3 pour $q = 2$, et de la deuxième partie du théorème 2.

On peut aussi les démontrer en reprenant ce qui a été dit aux paragraphes 3.1 et 3.2 et utilisant des théorèmes analogues relatifs au cas d'une fonction de $\mathcal{M}_1$ [1].

(Reçu le 6 octobre 1970)

H. Delange
Faculté des Sciences
91 - Orsay (France)

[1] Théorème B (dû à Wirsing) énoncé à la page 275 de notre article cité au paragraphe 2.3 et théorème principal de notre mémoire « Un théorème sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applications » (Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), 78 (1961), p. 1-29).