5. Fonctions de A_2 comme opérateurs

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

4.1.1. Il est clair que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$ et il résulte de (7) et (8) que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $G_1 \otimes G_1$, donc de G_2.

On voit immédiatement que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. Par suite $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

E étant l'endomorphisme de G_2 considéré au § 3, soit $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M}_2 \cap E^{-1}(e_2)$.

$\mathfrak{N}_2$ est un sous-groupe de G_2, comme intersection de deux sous-groupes, donc est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

$\mathfrak{M}_2$ est produit direct de $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$.

En effet, on a vu au § 3 que G_2 est produit direct de $E^{-1}(e_2)$ et $G_1 \otimes G_1$ et que, dans l'expression d'une fonction f de G_2 sous la forme

$$f = g * h, \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1,$$

on a $h = E(f)$ et $g = f_* h^{-*}$.

Mais on voit immédiatement que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $E(f) \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$. Donc, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ et par suite $h \in \mathfrak{M}_2$, $g \in \mathfrak{M}_2$ et finalement $g \in \mathfrak{N}_2$. De plus, l'expression de f sous la forme

$$f = g_* h, \quad \text{où} \quad g \in \mathfrak{N}_2 \quad \text{et} \quad h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1,$$

est unique parce que $\mathfrak{N}_2 \subset E^{-1}(e_2)$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$.

On voit de suite que $\mathfrak{N}_2$ est l'ensemble des fonctions g de $\mathfrak{M}_2$ qui satisfont à

$$g(p^j, p^k) = 0 \quad \text{quand } j \text{ ou } k = 0 \text{ mais } j+k>0,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$g(m, n) = 0 \quad \text{quand } \{p \mid p/m\} \neq \{p \mid p/n\}.$$

5. Fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs

Il est classique d'utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_1$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$, espace vectoriel que nous désignerons par X_1:

a étant une fonction de $\mathscr{A}_1$ et F une fonction de X_1, on désigne par $a \perp F$, par exemple, la fonction G de X_1 définie par

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

On peut de même utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel X_2 des fonctions complexes de deux variables réelles $\geqslant 1$.

a étant une fonction de $\mathscr{A}_2$ et F une fonction de X_2, on désignera par $a \perp F$ la fonction G de X_2 définie par

$$G(x, y) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} a(m, n) F\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}\right).$$

a étant fixée, l'application $F \to a \perp F$ est une application linéaire de X_2 dans X_2.

De plus, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

a) Quelle que soit $F \in X_2$, $e_2 \perp F = F$;

b) Quels que soient $F \in X_2$, $a \in \mathscr{A}_2$ et $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$(\lambda a) \perp F = \lambda (a \perp F) ;$$

c) Quelles que soient $F \in X_2$, a et $b \in \mathscr{A}_2$,

$$a \perp (b \perp F) = (a_* b) \perp F .$$

6. Fonctions génératrices

6.1. A la fonction f de $\mathscr{A}_2$ nous associons la série double

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{f(m, n)}{m^s n^{s'}},$$

où s et s' sont deux variables complexes.

S'il existe des valeurs de s et s' pour lesquelles cette série est convergente, la fonction qu'elle représente est dite « fonction génératrice » de f.

Si les séries associées aux fonctions f et g de $\mathscr{A}_2$ sont absolument convergentes pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, il en est de même de la série associée à $f_* g$ et sa somme est le produit des sommes des deux premières.

Pour le voir, il suffit de considérer la série quadruple

$$\sum_{m_1, m_2, n_1, n_2 \geq 1} \frac{f(m_1, n_1) g(m_2, n_2)}{m_1^s m_2^s n_1^{s'} n_2^{s'}},$$

qui est absolument convergente pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, et de grouper ensemble les termes pour lesquels les produits $m_1 m_2$ et les produits $n_1 n_2$ ont les mêmes valeurs.

Ainsi, comme dans le cas d'une variable, la convolution correspond à la multiplication des fonctions génératrices.