# § 3. Application aux problèmes aux limites

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

Pour toute paire $\{ f(x, y),\ g(x, y) \}$ satisfaisant (11), on a

$$d[-[\tilde{F}]_f] = \tilde{J}[f, g;\ -[\tilde{F}]_f] = \tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA\ ,$$

d'où par (10):

$$(12) \qquad d = \mathrm{Max}_{f,g} \{ \tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA \}$$

sous les conditions (11) et

$$(13) \qquad \begin{cases} f(x, y) \text{ continue } \textit{en } x\,, \text{ ainsi que } f_x\ ;\ f_{xx} \text{ existe;} \\ g(x, y) \text{ continue } \textit{en } y\,, \text{ ainsi que } g_y\ ;\ g_{yy} \text{ existe;} \\ f = g = \chi(s) \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

2.5. *Remarque.* — Il nous reste une liberté: la manière (arbitraire) dont nous remplaçons $v$ par $f$ ou par $g$ dans $F$, sous la condition (6). Même si $v$ n'apparaît pas explicitement dans $F$, nous sommes libres d'ajouter, dans $\tilde{F}$, des expressions s'annulant lorsque $f \equiv g$. En particulier, si nous remplaçons $\tilde{F}$ par $\tilde{F} + v\,.\,(f - g)$ avec $v(x, y)$ arbitraire, $\tilde{J}[f, g]$ devient $\tilde{J}[f, g] + \iint_G v\,.\,(f - g)\, dA = \tilde{J}[f, g;\ v]$. Cela nous montre que, si nous réservons notre liberté dans la construction de $\tilde{F}$, le choix $\lambda(x, y) \equiv 0$ ne signifie pas une restriction. La condition (11) devient alors

$$(11^*) \qquad [\tilde{F}]_f = [\tilde{F}]_g = 0\,;$$

donc

$$(12^*) \qquad d = \mathrm{Max}_{\left\{\begin{array}{l}\text{construction de } \tilde{F} \text{ satisfaisant (6)} \\ \text{choix de } f \text{ et } g \text{ satisfaisant (11*) et (13)}\end{array}\right.} \tilde{J}[f, g]\ .$$

## § 3. Application aux problèmes aux limites

Reprenons le problème considéré en 1.3. Le principe variationnel (I) est celui de Dirichlet (4): $F(x, y, v, v_x, v_y) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \rho v$; je pose *(par exemple !)* $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho f$; la condition (6) est satisfaite; la condition (11) est ici:

$$(11') \qquad f_{xx} + g_{yy} = -\rho(x, y)\ .$$

Nos hypothèses *(a)* et *(b)* sont satisfaites: $\lambda(x, y)$ étant choisie, $f$ est déterminée par $f_{xx} = \lambda - \rho$ dans $G$ et $f = \chi(s)$ sur $\Gamma$; $g$ est déterminée par $g_{yy} = -\lambda$ dans $G$ et $g = \chi(s)$ sur $\Gamma$: *ce sont les « problèmes auxiliaires unidimensionnels »*. — Nous avons alors

$$\tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA$$

$$= \iint_G \left[\frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho f + \rho f + f f_{xx} + g g_{yy}\right] dA$$

$$= \oint_\Gamma \chi(s)\left(f_x \frac{\partial x}{\partial n} + g_y \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds - \frac{1}{2}\iint_G (f_x^2 + g_y^2)\, dA\,;$$

d'où par (12):

$$(12') \quad d = \operatorname{Max}_{\substack{f,\, g \text{ satisfaisant} \\ (13) \text{ et } (11')}} \left[\oint_\Gamma \chi(s)\left(f_x \frac{\partial x}{\partial n} + g_y \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds - \frac{1}{2}\iint_G (f_x^2 + g_y^2)\, dA\right].$$

Ceci est précisément le principe de Thomson (5), restreint aux champs particuliers $\vec{p} = (f_x, g_y)$ avec $f = g = \chi(s)$ sur $\Gamma$. Ces champs concurrents, qui tiennent compte des conditions aux limites, sont « les meilleurs »: il est en effet facile [7, 8] de montrer que, si $p_{1_x} = f_{xx}$ et $p_{2_y} = g_{yy}$, la borne (12′) fournie par le champ $(f_x, g_y)$ est plus précise que (ou égale à) celle (5) fournie par $\vec{p}$. (12′) a été obtenue auparavant [7, 8] par la considération de problèmes auxiliaires unidimensionnels, et admet une interprétation physique simple (à l'aide du principe du Minimum de l'énergie potentielle).

*Remarque.* — On peut obtenir le même résultat (12′) en utilisant (12*) au lieu de (12): on choisit alors arbitrairement $\rho_1(x, y)$ et l'on pose $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho_1 f - (\rho - \rho_1) g$ ; nos hypothèses sont de nouveau satisfaites: $f$ est déterminée par $f = \chi(s)$ sur $\Gamma$ et l'équation d'Euler $0 = [\tilde{F}]_f = -\rho_1 - f_{xx}$ ; $g$ est déterminée par $g = \chi(s)$ sur $\Gamma$ et $0 = [\tilde{F}]_g = -(\rho - \rho_1) - g_{yy}$ ; sous la condition (11′), nous avons alors par (12*), en introduisant $\rho_1 = -f_{xx}$ et $\rho - \rho_1 = -g_{yy}$, $d \geqq \tilde{J}[f, g] = \iint_G [\frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) + f f_{xx} + g g_{yy}]\, dA$ comme ci-dessus, d'où (12′).