5. Observations.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ou bien, d'après (13) et observant que $T(h) = (-1)^n h.P_0$,

$$h = (-1)^n \frac{f(a)}{P_0}. \tag{16}$$

La solution générale cherchée sera alors

$$y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{P_n(t)}\, dt + (-1)^n \frac{f(a)}{P_0} \tag{17}$$

ou bien, en intégrant par parties et tenant compte de (14) pour éliminer C_n, elle aura l'expression

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \left[x^{n-i} - (-1)^{n-i} P_{n-i}(0)\right] + \left[\frac{(-1)^n}{P_0} - \frac{(x-a)^n}{P_n(a)}\right] f(a)$$
$$+ n \int_a^x (x-t)^{n-1} \frac{P_n(t) + (x-t) P_{n-1}(t)}{P_n^2(t)} f(t)\, dt. \tag{18}$$

5. Observations.

a) Sous la forme (17), la résolution de (3) nécessite l'existence et l'intégrabilité de la dérivée $f'(x)$, tandis que *la forme (18) ne suppose que l'intégrabilité de* $f(x)$.

b) L'expression (18) met en évidence n fonctions fondamentales de (3) — les polynomes qui multiplient les constantes arbitraires C_i. *Elles ont été déterminées sans résoudre aucune équation algébrique caractéristique*, propriété qui constitue un avantage d'ordre pédagogique sur les équations linéaires à coefficients constants ou sur les équations d'Euler.

c) *La solution générale (18) de l'équation (3) appartient à la classe* $C^n[a, b]$ *si la fonction connue* f (x) *est bornée et intégrable sur tout intervalle* [a, b] *de l'axe* Ox, *où* a *et* b *sont compris entre deux racines consécutives réelles de l'équation* $P_n(x) = 0$.

d) Si c est une racine réelle de cette équation $P_n(x) = 0$, la droite $x - c = 0$ est encore une intégrale car le long de cette droite $dx = 0$.

e) La solution (17) existe aussi pour $a = c$, racine de $P_n(x)$, (d'ordre de multiplicité m) si la fonction $f(x)$ admet une dérivée au voisinage de c où celle-ci se présente sous la forme

$$f'(x) = (x-c)^q f_1(x)$$

avec $f_1(c) \neq 0, \infty$ et $q \geqq m$, car c est une singularité apparente pour $\frac{f'(t)}{P_n(t)}$. Le cas $m-1 < q < m$ conduit à des intégrales généralisées, les solutions effectives de (3) étant données par (17) (pour $a = c$), et seulement le cas $q \leqq m-1$ est à rejeter une fois que les intégrales correspondantes de (17) sont divergentes au voisinage de c.

6. Généralisation de la méthode.

Le problème étudié s'étend d'une manière naturelle au cas des équations (3) qui peuvent être réduites par p dérivations à l'équation

$$Y^{(n+p)} = \frac{f_0^{(p)}(x)}{P_n(x)} \tag{19}$$

M. Const. Săulesco, étudiant IIIe année, s'est proposé de trouver ces équations et a montré qu'elles se présentaient sous la forme

$$T_p(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_{p+i-1}^{p-1} P_n^{(i)}(x)\, y^{(n-i)}(x) = f_0(x) \tag{20}$$

où $P_n(x)$ est un polynome arbitraire du n-ième degré et C_a^b le nombre des combinaisons b à b de a objets. Une suite de p intégrations permet immédiatement d'effectuer le passage de (19) à (20), ce qui constitue une vérification directe.

Par l'introduction des polynomes de la classe Appell $P_n(x)$, ($n = 0, 1, \ldots$), qui satisfont aux relations

$$P_n^{(i)}(x) = n(n-1)\ldots(n-i+1)\, P_{n-i}(x), \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{21}$$

l'équation (20) prend la forme généralisant (3)