Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1965)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL
Autor: Fréchet, Maurice
Kapitel: objections possibles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39967

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

crois que ce point de vue s'imposera de plus en plus aux mathématiciens et que le continu n'aura été qu'un instrument transitoire, dont l'utilité actuelle n'est pas négligeable... mais qui devra être regardé seulement comme un moyen d'étudier les ensembles dénombrables, lesquels constituent la seule réalité que nous puissions atteindre.

Les objections possibles

Déjà dans A (et aussi dans B), considérons, pour prendre le cas le plus simple, son exemple du biologiste. Selon Borel, en parlant d'un être vivant, les biologistes « pensent simplement aux êtres vivants qu'ils connaissent ou qu'ils pourraient connaître » ... « sans être obligés de se créer une conception *a priori* de l'être vivant en soi ». Si ce biologiste entre dans un pays nouveau, qu'il y rencontre: une montagne, un lac, un lion, etc., comment ne risquera-t-il pas de classer la montagne dans les êtres vivants, s'il n'a pas, *avant* d'entrer dans ce pays, une conception *a priori* des êtres vivants. Cette conception, il n'est pas nécessaire qu'elle soit innée, ni définitive, elle lui sera, sans doute, suggérée par les différences qu'il voit entre les êtres vivants qu'il connaît et les choses sans vie qu'il connaît aussi. Mais il faut qu'il se soit ensuite imposé à lui-même une telle discrimination, pour pouvoir l'appliquer plus tard aux éléments naturels qu'il rencontre.

De même, quoique dans un domaine tout autre, abordé dans B, il semble, d'après Borel, qu'après avoir étudié certaines fonctions particulières, on saura, en rencontrant de nouvelles entités mathématiques, si ce sont ou non, d'autres fonctions particulières, sans avoir *a priori* la notion générale de fonction. Un mathématicien rencontrera des égalités, des cercles, des inégalités, des sommes, des intégrales, etc. Comment saura-t-il distinguer, parmi ces éléments, ceux qui sont des fonctions, qu'il ne connaissait pas encore, sans avoir décidé au moins provisoirement, à l'avance, ce que c'est qu'une fonction ? S'il l'a décidé, il pourra, d'après Borel lui-même (B) appliquer à ces nouvelles fonctions particulières « les raisonnements faits sur « la fonction » en général ». S'il n'a rien décidé, il devra recommencer aveuglément ces raisonnements sur chaque nouvelle fonction particulière.

D'après Borel, lui-même (dans B), les raisonnements faits sur des fonctions formulées explicitement « s'appliqueront, en outre, aux fonctions particulières qui pourront être découvertes ultérieurement et qui possèdent les propriétés spécifiées dans les énoncés ». Qu'est-ce à dire, sinon que les raisonnements s'appuient sur le fait que chaque fonction particulière, d'une part détermine en fait une correspondance et en outre qu'elle possède les propriétés spécifiées dans les énoncés qui la concernent. Autrement dit, que, peut-être, avec Borel, on ne voudra, et on en a le droit, retenir et utiliser un théorème que pour les fonctions « effectivement définies », mais que *la démonstration elle-même ne fait pas intervenir cette restriction.* C'est-à-dire que *la théorie sera la même*, mais qu'elle ne sera appliquée par les uns qu'à certaines fonctions.

Dans B, Borel décrit un détour qui, attribuant une expression analytique (somme d'une série, intégrale...) à une fonction antérieurement conçue, ramène l'idée de fonction conçue à celle de fonction construite. Mais, comme nous l'avons dit, la théorie des fonctions comprend d'abord des théorèmes s'appliquant à toute fonction conçue, puis des propriétés particulières à chaque fonction construite. Le détour dont il est question augmentera bien le nombre de ces propriétés particulières, mais ne changera rien à la théorie générale: *pour celle-ci, il n'y a pas de détour.* Pour citer seulement un exemple: on sait qu'une fonction conçue comme continue en chaque point d'un segment est uniformément continue. Et pour énoncer et démontrer ce théorème, nous n'avons pas à nous préoccuper si la fonction est ou non « effectivement définie ».

A la fin de B, Borel dit que « pour classer cette infinie variété [de fonctions], on possède une base solide qui faisait défaut...: l'étude systématique des procédés de construction... ». Cela est tout à fait exact, pourvu qu'on comprenne qu'il s'agit d'un moyen *supplémentaire*, et non unique, de classification, s'ajoutant (disons-le, très utilement) aux moyens *déjà* connus.

Dans C, Borel considère qu'il y aurait « une grande simplification dans les méthodes de l'Analyse » si « les éléments indéfinissables étaient réellement mis à part ».

Ne serait-on pas, au contraire, plutôt porté à croire qu'en se préoccupant d'introduire une telle discrimination dans les raison-

nements, on les compliquerait plutôt qu'on ne les simplifierait. Reportons-nous à l'exemple de la page 30. Il semble bien que Borel considère (comme d'ailleurs nous-même) que les très grands nombres nous sont inaccessibles. Dès lors, si en les rangeant dans les « indéfinissables » on « les mettaient réellement à part », on tomberait dans les complications signalées, page 30, pour démontrer, par exemple, ce théorème bien élémentaire que $a+b = b+a$.

Tous seront d'accord avec Borel pour donner l'avantage aux définitions constructives dans les applications. Mais dans les déponstrations, les définitions descriptives seront souvent plus commodes. Donnons un exemple. Prenons un élément mathématique aussi élémentaire, aussi simple, que le milieu d'un segment rectiligne AB. On peut en donner une définition descriptive: c'est un point M du segment AB, s'il en existe, tel que $MA = MB$. Cette définition très simple laisse en doute les deux questions: y a-t-il un tel point; s'il y en a un, y en a-t-il un seul ou plusieurs ? Une définition constructive répond en même temps à ces deux questions. Par exemple on peut dire:

Traçons deux cercles de même rayon égal à AB mais de centres respectifs A et B. Ils se coupent en deux points C et D. La droite CD coupe AB au point M cherché. Nous avons ainsi un des moyens graphiques de définir M; en même temps, cette construction établit l'existence et l'unité de M.

Mais, d'autre part, combien une telle définition (constructive) serait encombrante dans toutes les démonstrations faisant intervenir le milieu d'un segment ! C'est la définition descriptive qui est, avec raison, universellement employée dans les démonstrations.

S'il n'est pas toujours possible de suivre Borel dans toutes les conséquences qu'il tire au cours des passages A, B..., que nous venons de citer, cela tient parfois à certaines contradictions, au moins apparentes. Par exemple (p. 29), un élément ne peut être « effectivement défini » que s'il est défini au moyen « d'un nombre fini de mots ». Et, pourtant dans D, les ensembles dénombrables (donc éventuellement infinis) nous sont présentés comme « la seule réalité que nous puissions atteindre ».

D'ailleurs, que signifie une définition « en un nombre fini de mots » ? Si, parmi ces mots, figure « l'infini », la définition

sera-t-elle réellement distincte d'une définition comprenant une infinité de mots ? D'autre part, la notion « infini » elle-même peut s'exprimer en un nombre fini de mots. Par exemple, la suite *infinie* des nombres entiers peut se définir comme: une suite d'entiers successifs où chaque entier est suivi d'un autre entier.

La notion « infini » nous paraît être une « idéalisation » commode (et même indispensable dans la mathématique moderne) de la notion de grand nombre. S'il en est ainsi, on ne comprendra donc pas comment Borel peut présenter la notion d'ensemble dénombrable comme « la seule réalité que nous puissions atteindre ». Il faudrait en conclure, en particulier, que la notion de l'infini est une réalité que nous pouvons atteindre, alors qu'elle apparaît comme une idéalisation de la notion de grand nombre et non pas comme une réalité.

Ce point de vue a été déjà exprimé, il y a plus de deux siècles, par le grand mathématicien et philosophe Leibniz, qui, dans une lettre privée écrite à Dangicourt en 1716, écrivait: « Je leur témoignais que je ne croyais point qu'il y eut des grandeurs véritablement infinies, ni véritablement infinitésimales, que ce n'étaient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement, comme les racines imaginaires dans l'algèbre. »

A partir du moment où l'on admet l'infini, où, donc, on introduit une idéalisation, on ne voit pas pourquoi on considérerait comme hétérodoxe le continu et les nombres transfinis. Ce ne sont pas des réalités, mais ce sont, au même titre que les ensembles dénombrables, des idéalisations commodes et utiles.

Réponse partielle aux objections précédentes

Nous avons sélectionné, à partir de la page 33, les passages de Borel où les méthodes descriptives semblent le plus énergiquement condamnées. Toutefois, il faut signaler que cette condamnation n'était pas entièrement définitive. Borel n'a pas hésité lui-même à employer, dans certaines démonstrations, des méthodes seulement descriptives, tout en souhaitant les voir remplacer plus tard par des méthodes descriptives. On en verra