Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1965)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL
Autor: Fréchet, Maurice
Kapitel: Borel initiateur
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39967

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

donner de beaucoup plus élémentaires. Soit, par exemple, la somme $a + b$ de deux nombres entiers a et b. Si nous admettons que les nombres qui nous sont concrètement accessibles restent tous au-dessous d'une certaine limite N, la somme $a + b$, non seulement ne pourra pratiquement avoir de sens que si a et b sont inférieurs à N, mais même il faudra supposer que $a + b$ soit lui-même inférieur à N. Dans tout raisonnement où intervient une somme $a + b$, a et b devront être soumis à cette limitation. Comme le dit Borel (voir pp. 29 et 37), on peut concevoir la possibilité de construire une théorie soumise à de telles restrictions)[1]. Mais que de complications ! Les raisonnements les plus simples deviendraient inextricables.

Dans le même passage de Borel, il est rappelé que Volterra a fréquemment insisté sur l'intérêt qu'il y a, pour généraliser, à passer à la limite du fini à l'infini.

Nous croyons utile, ici, de faire, une fois de plus, une distinction. Ce passage est en effet extrêmement utile quand il s'agit de raisonnements intuitifs, qui permettent, par analogie, de prévoir un résultat dans le cas infini, d'après sa forme dans le cas fini.

Mais, quand il faut passer à des démonstrations rigoureuses, on se heurte souvent à d'énormes difficultés.

Dans ce cas, l'expérience a souvent prouvé qu'il valait mieux procéder autrement. Chercher dans le cas fini à distinguer tout ce qui, dans les raisonnements connus, ne fait pas *effectivement* intervenir l'hypothèse du fini... Et constituer ainsi une théorie plus générale, ou obtenir des théorèmes plus généraux.

Borel initiateur

La description des tendances générales de l'œuvre de Borel qui résulte des appréciations de ses commentateurs et de lui-même, n'est cependant pas complète.

Nous avons dit ailleurs au sujet d'une des idées dues à Borel qu'il était *un initiateur*. Mais il l'a été aussi en introduisant d'autres notions.

---

[1]) Robin avait publié un ouvrage dans ce sens.

Pour être précis, nous donnerons immédiatement les *noms* de quelques-unes de ces notions, mais, pour rester sur le terrain des généralités non techniques, nous réserverons leurs définitions et propriétés à la troisième partie.

Le rôle d'initiateur de Borel s'est exercé au sujet de notions dont les unes étaient le couronnement d'une suite d'essais qui avaient été faits pour donner une signification satisfaisante à une notion intuitive, par exemple la notion de mesure d'un ensemble, généralisant la notion de longueur d'un intervalle.

D'autres s'attaquaient à une théorie paraissant définitive mais qui, malgré sa beauté, présentait certains inconvénients, qu'il s'agissait de faire disparaître. Par exemple, la notion de « fonction analytique », due à Weierstrass laissait un fossé entre l'ensemble de telles fonctions et l'ensemble des fonctions très discontinues. Par sa notion de fonction monogène ou quasi analytique, Borel a jeté un pont insoupçonné entre ces deux ensembles.

Par exemple, aussi, on considérait seulement, avant Borel, les probabilités discontinues et les probabilités géométriques. Borel a montré qu'il existait entre ces deux catégories une troisième, celle des « probabilités dénombrables » dont il a étudié les propriétés.

Par exemple encore, il y avait aussi une coupure entre la famille des séries convergentes et celle des séries divergentes. Borel a encore lancé un pont non moins insoupçonné entre ces deux familles. Citons encore les travaux de Borel sur les « fonctions entières » qui lui ont permis de donner une démonstration directe du « grand théorème de Picard ».

C'est Borel lui-même qui fait ressortir la nature commune de ses apports sur ces différents sujets, en écrivant, avec raison: « ... je crois pouvoir faire observer que dans [ces] théories..., j'ai eu la bonne fortune d'apporter sur un point capital une contribution essentielle... grâce à laquelle la théorie a pu, en quelque sorte, franchir un point mort et prendre un essor nouveau ».

Il dit aussi: « Les résultats que je viens de résumer étaient absolument inattendus pour la plupart des géomètres. »

Et d'ailleurs, ce n'est pas tout. Les lignes ci-dessus étaient écrites par Borel en 1921, l'année même où, *après* la publication

des mêmes lignes, il faisait paraître la première des Notes *mémorables* par lesquelles il fondait, sept ans avant von Neumann, la théorie des jeux psychologiques (dont l'invention était, il y a peu de temps encore, faussement attribuée à von Neumann) [1].

Ici, il ne s'agit même plus de perfectionnement ou de franchissement d'un point mort, il s'agit de la création d'une notion tout à fait nouvelle, de l'entrée dans un monde entièrement nouveau, à savoir de l'introduction et de l'utilisation efficace des mathématiques dans un domaine: le domaine psychologique, qui paraissait inaccessible aux mathématiciens.

Des réserves philosophiques

Nous avons apporté, dans ce qui précède, une adhésion enthousiaste aux diverses idées de Borel que nous venons de présenter. Si l'on y ajoute l'essentiel, c'est-à-dire les résultats et les méthodes nouvelles qui seront résumés dans la Troisième Partie, on ne peut s'empêcher de ressentir une vive admiration devant cet ensemble. *Emile Borel restera un des plus grands mathématiciens de son époque*, pourtant riche en très grands talents mathématiques.

Mais, si un résultat mathématique ne peut être que vrai ou faux, il n'en est pas de même des considérations qui l'accompagnent. En Philosophie des sciences, on peut soutenir des opinions opposées, ou qui paraissent opposées, sans qu'on puisse toujours affirmer que l'une est vraie et l'autre fausse.

On sait, par exemple, qu'un mathématicien aussi éminent que M. Hadamard, s'est trouvé parfois en désaccord avec les points de vue développés par Borel concernant les fondements des mathématiques. C'est pourquoi, il nous a paru utile de présenter, après les citations de Borel qui vont suivre, les objections qui viennent naturellement à l'esprit et auxquelles, d'ailleurs, nous répondrons en partie nous-même, à la page 38.

Nous avons reproduit plus haut, pages 28 et 29, des citations de Borel où il fait ressortir avec raison l'intérêt et l'utilité

---

[1]) Aussi avons-nous cru utile de reproduire les courtes notes consacrées par Borel à ce sujet, avec un commentaire, d'abord en traduction anglaise, dans *Econometrica*, puis en français dans la *Revue d'économie politique*.