12. Les dimensions k = 0 et k = n.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

12. Les dimensions $k = 0$ et $k = n$.

Nous allons entamer l'étude de quelques dimensions k particulières dans l'espace n-dimensionnel. Nous commençons ici par $k = 0$ et $k = n$. Rappelons les conventions qui s'y rapportent.

Un k-vecteur se réduit à une quantité scalaire pour $k = 0$, pseudo-scalaire pour $k = n$. Dans les deux cas, sa direction se réduit au signe $+$ ou $-$. Un intégrant $f(x, j)$ quelconque est donc donné par une paire de fonctions

$$(12.1) \qquad f_+(x) = f(x, +), \quad f_-(x) = f(x, -);$$

il sera linéaire en j si $f_+ = -f_-$. Une variété généralisée $\mathscr{L}$ sera donnée par une représentation de la forme

$$(12.2) \qquad \mathscr{L}(f) = \int f_+ \, d\mu_+ + \int f_- \, d\mu_- ,$$

où μ_+, μ_- sont des mesures finies à supports compacts. Remarquons que si $\mathscr{L}$ ne possède aucune sous-variété singulière, les mesures μ_+ et μ_- auront des supports boréliens disjoints.

Il y a, cependant, des différences importantes entre les deux cas $k = 0$ et $k = n$. En effet, une quantité pseudo-scalaire se distingue nettement de la quantité scalaire, à laquelle elle est normale, par les conventions qui gouvernent la multiplication extérieure. Il ressort de ces conventions que pour $k = n$, tout intégrant linéaire est exact, tandis que pour $k = 0$ les intégrants exacts sont les intégrants linéaires constants par rapport à x.

Les dimensions $k = 0$ et $k = n$ diffèrent aussi dans la définition des polytopes, etc. Cela tient à ce que la notion de point, orienté avec le signe $+$ ou $-$, est celle de simplex de dimension 0, tandis qu'elle est toute différente de celle de simplex de dimension n. On notera qu'un σ-polytope avec poids, de dimension $k = 0$, sera défini par une fonctionnelle de la forme

$$(12.3) \qquad \mathscr{L}(f) = \Sigma a_\nu f_+(x_\nu) + \Sigma b_\nu f_-(x_\nu) ,$$

où $a_\nu \geqq 0$, $b_\nu \geqq 0$, $\Sigma(a_\nu + b_\nu) < \infty$, $\operatorname{Sup} |x_\nu| < \infty$. C'est le cas de mesures discrètes dans (12.2). Pour qu'un tel σ-polytope avec

poids ait la même frontière qu'une variété généralisée donnée par (12.2), on aura à poser

$$(12.4) \qquad \int d(\mu_+ - \mu_-) = \Sigma(\alpha_\nu - b_\nu) .$$

Ainsi, pour la dimension $k = 0$, toute variété généralisée possède une frontière A, puisqu'on peut toujours choisir un σ-polytope avec poids de façon à ce que le côté droit de (12.4) ait une valeur donnée. D'ailleurs (12.2) montre déjà que, pour la dimension $k = 0$, toute variété généralisée s'exprime comme un mélange de la forme $\int \mathscr{L}_\alpha \, d\alpha$, où chaque $\mathscr{L}_\alpha$ est un simplex. Dans une étude complète des cas d'égalité de (8.5), ce résultat, peu intéressant en lui-même, pourra éventuellement servir de base à une démonstration inductive d'un théorème général. On conçoit aussi une induction descendante possible, en partant du résultat correspondant pour la dimension $k = n$. Nous combinons ces deux résultats en un seul énoncé:

(12.5) Point de départ: les cas dégénérés $k = 0$ et $k = n$ dans l'espace n-dimensionnel. Toute variété généralisée de dimension $k = 0$ appartient aux classes A et A_{gd}, toute variété généralisée de dimension $k = n$ et de frontière A, à la classe A_{gd}. Chacune d'elles appartiendra à la classe A_d, si elle ne possède aucune sous-variété singulière non nulle.

Démonstration. — Ce qui se rapporte à la dimension $k = 0$ se ramène aux remarques déjà faites. Reste à traiter la dimension $k = n$. Soit $\mathscr{L}$ une variété généralisée de cette dimension, et supposons qu'elle possède la même frontière qu'un σ-polytope Π avec poids. En changeant d'orientation, on aura un σ- polytope Π^* avec poids, tel que $\mathscr{L} + \Pi^*$ soit clos. Mais alors $\mathscr{L} + \Pi^*$ sera singulier, donc $\mathscr{L}$ et Π auront le même substratum. On peut poser, d'après (11.2),

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}' + \mathscr{L}'' , \qquad \Pi = \Pi' + \Pi'' ,$$

où $\mathscr{L}'$, Π' sont des variétés singulières, et où $\mathscr{L}''$, Π'' sont des variétés généralisées, de même substratum, qui ne possèdent aucune sous-variété singulière non nulle. On en conclut facilement, en utilisant pour $\mathscr{L}''$ et Π'' des représentations du type (12.2), que $\mathscr{L}'' = \Pi''$, donc que $\mathscr{L}'' \in A_d$, à condition de faire

appel à la remarque faite après la formule (12.2), selon laquelle les mesures μ''_+, μ''_-, qui y paraîtront lorsqu'il s'agit de représenter $\mathscr{L}''$, auront des supports boréliens disjoints. On utilisera encore cette même formule pour représenter $\mathscr{L}'$, et l'on décomposera les mesures μ'_+, μ'_- qui y paraîtront, chacune en deux parties, respectivement absolument continue et singulière par rapport à la mesure μ''_+ ou μ''_- correspondante. En faisant l'addition, on trouvera pour $\mathscr{L} = \mathscr{L}' + \mathscr{L}''$ une nouvelle représentation, d'où il ressort que $\mathscr{L} \in A_{gd}$, ce qui complète la démonstration de notre énoncé.

13. La dimension $k = n - 1$.

Nous poursuivons notre étude, mais en improvisant les démonstrations, qui déjà seront trop faibles pour nous livrer l'égalité vraisemblable $A_{gd} = \partial^{-1}\,\partial A$. Il nous manque une méthode générale, il nous manque aussi, même pour $k = n - 1$, une méthode qui conduirait au résultat le plus précis. Cependant, comme nous l'avons dit dans notre introduction, le résultat que nous allons démontrer ici, pour $k = n - 1$, est toujours un théorème de nature progressive. Sa démonstration se basera sur celle que nous avons présentée, il y a dix ans, dans les cas $n = 2$ et $n = 3$ avec M. Fleming [9, 5].

(13.1) *Théorème.* — Soit $\mathscr{L}$ une variété généralisée de dimension $n - 1$ et de frontière A. Alors $\mathscr{L} \in A_g$.

Pour démontrer ce théorème, équivalent d'après (8.5) à l'égalité $A_g = \partial^{-1}\,\partial A$, nous aurons besoin de définitions et de lemmes auxiliaires.

Un polytope clos $\mathscr{P}$ sera dit irréductible s'il ne possède aucune décomposition $\mathscr{P} = \mathscr{P}' + \mathscr{P}''$, où $\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}''$ sont des polytopes clos non nuls. Une variété généralisée close $\mathscr{L}$ sera dite pure, si pour toute expression $\mathscr{L} = \mathscr{L}' + \mathscr{L}''$ de $\mathscr{L}$ comme la somme de deux variétés généralisées closes $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$, il existe dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq 1$ une constante θ, telle que $\mathscr{L}' = \theta\mathscr{L}$.

Pour abréger, un polytope clos irréductible de dimension $n - 1$, et une variété généralisée close pure de la même dimension, seront dites, respectivement, polytope typique et variété typique, lorsqu'elles sont situées dans l'espace n-dimensionnel.