2.2. L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

THÉORÈME 3 (Kamke [2]): Soit (F) une structure feuilletée de classe C^r du plan R^2. Soit Ω un ouvert borné du plan. Il existe une fonction numérique ψ définie dans Ω et qui vérifie les propriétés suivantes:

(i) ψ est r-différentiable et le gradient de ψ est différent de 0 en tout point de Ω;

(ii) ψ est constante sur les feuilles de la structure feuilletée induite par (F) sur Ω.

THÉORÈME 4 (Wazewsky [7]): On peut munir le plan R^2 d'une structure feuilletée de classe C^∞ telle que toute fonction r-différentiable sur R^2 et qui est constante sur les feuilles de la structure feuilletée se réduise à une constante.

Nous ne reproduirons pas la démonstration du théorème 1, mais nous montrerons dans 2.2 et 2.3 que les théorèmes 2, 3 et 4 sont des conséquences du théorème 1 et des propriétés des variétés à une dimension établies dans la première partie.

Exemples de structures feuilletées du plan:

1. Les droites $y = \text{Cte}$ sont évidemment les feuilles d'une structure feuilletée du plan;
2. Soit C une courbe de Jordan dans le plan R^2. La structure feuilletée précédente induit sur l'ouvert limité par C et qui est homéomorphe à R^2 une structure feuilletée analytique;
3. Le complémentaire U dans R^2 de l'ensemble des points de coordonnées $x = 0$, $y \geqslant 0$ est homéomorphe à R^2. Les composantes connexes des lignes de niveau de la fonction $\psi = xy$ sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique de U.

2.2. *L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan.*

La proposition suivante est une conséquence essentielle du théorème 1 de 2.1.

PROPOSITION 1: *Soit* (F) *une structure feuilletée du plan* R^2. *L'espace quotient* V *de* R^2 *par la relation d'équivalence* ρ *associée*

au feuilletage (cf. définition 2 de 2.1) est une variété à une dimension à base dénombrable et simplement connexe. Si (F) *est une structure feuilletée différentiable de classe* C^r *(ou analytique), l'espace des feuilles* V *est muni canoniquement d'une structure de variété à une dimension différentielle de classe* C^r *(ou analytique).*

Comme R^2 est connexe et à base dénombrable, V est également connexe et à base dénombrable. Pour montrer que V est une variété à une dimension, il suffit de vérifier que tout point z de V admet un voisinage ouvert homéomorphe à la droite numétique. Soit π la projection canonique de R^2 sur V; la feuille $\pi^{-1}(z)$ rencontre au moins un ouvert distingué 0_i. La relation d'équivalence induite par ρ dans 0^i est, d'après le théorème 1, la relation ρ_i. Donc $\pi(0_i)$ qui est un voisinage ouvert de z, puisque ρ est une relation d'équivalence ouverte, est homéomorphe à $0^i/\rho_i$, c'est-à-dire à la droite numérique.

En vertu du théorème de Jordan, le complémentaire de toute feuille (qui est un sous-ensemble fermé de R^2) a deux composantes connexes; le complémentaire de tout point de V a donc également deux composantes connexes. Cette propriété est équivalente au fait que V est simplement connexe (cf. 1.2, lemme).

Soit A un atlas définissant sur R^2 la structure feuilletée différentiable considérée et soit $\overline{h}_i$ la restriction de la carte $h_i \in A$ à la droite $x = 0$. L'ensemble des cartes $\pi\overline{h}_i$ de R dans V est un atlas qui définit sur V une structure différentiable.

Le lecteur pourra construire à titre d'exercice l'espace des feuilles des structures feuilletées du plan définies dans les exemples ci-dessus.

2.3. *Application des résultats de 1. aux structures feuilletées du plan.*

Démonstration du théorème 2.

Le théorème 2 de 2.1 (Kaplan) est une conséquence immédiate de la proposition 1 de 2.2 et de la proposition 1 de 1.2. Soit f une application qui étale l'espace quotient R^2/ρ dans R; l'application $\varphi = f\pi$ est une fonction numérique sur R^2 qui satisfait aux conditions du théorème 2.