1. Propriétés des variétés a une dimension.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

séparation de Hausdorff. Ces espaces s'introduisent en effet d'une manière naturelle dans plusieurs questions [2]. Le but de notre article est de montrer comment l'étude des variétés à une dimension (en général non séparées) permet de retrouver plusieurs propriétés des feuilletages du plan.

La première partie est consacrée à l'étude des variétés non séparées (plus particulièrement des variétés à une dimension). Après avoir donné quelques définitions et des exemples (1.1), nous établissons quelques propriétés des variétés à une dimension simplement connexes (1.2) et des structures différentiables qu'on peut y définir (1.3). Ces propriétés seront appliquées dans la seconde partie.

Les structures feuilletées du plan ont été étudiées par Poincaré et de nombreux auteurs. Les définitions fondamentales et les principaux résultats ont été rassemblés en 2.1. Les théorèmes 2, 3 et 4, dus à Kaplan, Kamke et Wazewsky, deviennent particulièrement clairs à notre sens si l'on part de la remarque fondamentale suivante: l'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan est une variété à une dimension (en général non séparée) (2.2). Ces théorèmes sont démontrés en 2.3.

1. Propriétés des variétés a une dimension.

1.1. *Définitions et exemples.*

Définition 1: *Une variété topologique à* n *dimensions* V_n *est un espace topologique dont chaque point admet un voisinage ouvert homéomorphe à l'espace numérique à* n *dimensions* R^n.

On appelle *carte* de R^n dans V_n un homéomorphisme h de R^n sur un ouvert U de V_n; l'ouvert U est le *but* de la carte h. Le changement de cartes associé à deux cartes h_i et h_j de R^n dans V_n de buts respectifs U_i et U_j est l'homéomorphisme $h_j^{-1} h_i$ [3] de l'ouvert $h_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ de R^n sur l'ouvert $h_j^{-1}(U_i \cap U_j)$. D'après la définition précédente, il existe toujours un ensemble de cartes

[2] Par exemple, un faisceau défini sur une variété séparée est muni d'une structure de variété en général non séparée.

[3] Si f est une application d'une partie A d'un ensemble E dans un ensemble E′ et f' une application d'une partie A′ de E′ dans un ensemble E″, on désignera par $f'f$ l'application $x \to f'[f(x)]$ de la partie de E formée des points x tels que $f(x) \in A'$.

dont les buts recouvrent V_n; un tel ensemble sera appelé un *atlas* de R^n sur V_n [4].

Les variétés topologiques séparées sont souvent munies de structures supplémentaires: orientation, structure différentiable, structure complexe... Ces notions (ainsi que celles, par exemple, de vecteur tangent ou de tenseur) sont définies sans faire appel à l'axiome de séparation; elles se transposent donc immédiatement aux variétés non séparées.

Un procédé de construction général.

DÉFINITION 2: *On dit qu'une application continue* p *d'un espace topologique* E *dans un espace topologique* E′ *étale* E *dans* E′, *si tout point* x *de* E *admet un voisinage ouvert* U *tel que la restriction de* p *à* U *soit un homéomorphisme sur un ouvert de* E′.

PROPOSITION 1: *Soit* V_n *une variété à* n *dimensions et soit* ρ *une relation d'équivalence ouverte dans* V_n *telle que la restriction de* ρ *à un voisinage suffisamment petit de tout point* x *de* V_n *se réduise à l'identité. L'espace topologique quotient* $V'_n = V_n/\rho$ *de* V_n *par la relation d'équivalence* ρ *est une variété à* n *dimensions et l'application canonique* p *de* V_n *sur* V_n/ρ *étale* V_n *sur* V'_n.

En effet, si U est un voisinage ouvert de x tel que la restriction de ρ à U soit l'identité, la restriction de p à U est un homéomorphisme de U sur un ouvert U′ de V'_n; chaque point de V_n admet un voisinage homéomorphe à R^n, il en sera donc de même pour chaque point de V'_n.

Remarquons que si V_n est une variété séparée, en général il n'en sera pas de même pour V'_n, comme le montreront les exemples qui suivent.

Le procédé de construction des variétés donné par la proposition 1 est général dans le sens suivant: Etant donnée une variété à n dimensions V_n, il existe une famille de cartes h_i de R^n dans V_n dont les buts recouvrent V_n (i parcourant un ensemble d'indices I); la variété V_n est donc isomorphe au quotient de l'espace somme $I \times R^n$ par la relation d'équivalence associée à l'application $(i, x) \to h_i(x)$ de $I \times R^n$ sur V_n.

---

[4] Nous utilisons ici la terminologie et les définitions de C. Ehresmann.

DÉFINITION 3: *Un point* x *d'une variété* V_n *est appelé un point de branchement s'il existe un point* z *de* V_n ($z \neq x$) *qui n'est pas séparé de* x, c'est-à-dire que tout voisinage de x rencontre tout voisinage de z.

On remarquera que la relation « x n'est pas séparé de z » est symétrique et réflexive, mais qu'elle n'est pas transitive en général (cf. exemple 3 ci-dessous).

Exemples.

La proposition 1 permet la construction d'une multitude d'exemples de variétés. Nous limitant maintenant aux variétés à une dimension et satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité, nous allons étudier quelques exemples importants.

EXEMPLE 1. Soient R_1 et R_2 deux exemplaires de la droite numérique réelle R et soit Σ la somme topologique de R_1 et R_2. Considérons un ouvert Ω de R; la relation d'équivalence ρ dans Σ qui identifie les points de R_1 et R_2 de même abscisse $t \in \Omega$ et qui se réduit à l'identité pour les autres points satisfait à la condition de la proposition 1. En passant au quotient, on obtient une variété à une dimension V. Les points de branchement sont ceux dont l'abscisse est un point frontière de Ω [5]. Il est utile d'indiquer quelques cas particuliers:

a) *le branchement simple:* ici Ω est l'ensemble $t < 0$. Les points de branchement sont ceux d'abscisse 0;

b) *le lasso:* Ω est l'ensemble $t > 0$ et $t < -1$. Les points de branchement sont les points d'abscisse 0 et -1.;

c) *le lasso étranglé:* Ω est l'ensemble $t \neq 0$. Les points de branchement ont l'abscisse 0;

d) Ω est le complémentaire de l'ensemble parfait de Cantor. Ici l'ensemble des points de branchement a la puissance du continu.

EXEMPLE 2. *La boucle:* Soit ρ la relation d'équivalence dans la droite numérique R qui identifie les points d'abscisse t et $-t$ pour $|t| < 1$ et qui se réduit à l'identité pour les autres

[5] L'abscisse du point x de Σ/ρ est l'abscisse des points de Σ qui sont projetés sur x par l'application canonique de Σ sur Σ/ρ.

points. L'espace quotient est la boucle et les points de branchement sont les points 1 et — 1.

EXEMPLE 3. *L'étoile:* Soit Σ la somme topologique de n exemplaires $R_1, R_2, \ldots R_n$ de la droite numérique. Soit ρ la relation d'équivalence dans Σ qui identifie chaque point d'abscisse $t > 0$ de R_i avec le point d'abscisse $-t$ de R_{i+1} ($1 \leqslant i \leqslant n$; on posera $R_{n+1} = R_1$). L'espace quotient est une variété à une dimension qui peut être appelée une étoile à n branches. Les points de branchement sont ici les points d'abscisse 0; deux tels points appartenant à R_i et R_j sont séparés si et seulement si $i - j \neq 1$. On pourrait considérer également une étoile avec une infinité de branches.

EXEMPLE 4. *La plume:* L'exemple 1 *a)* montre comment il est possible de « greffer » au point $t = 0$ d'une droite R un branchement simple; on peut évidemment greffer un tel branchement en un point quelconque de R. Si en tous les points de coordonnées rationnelles de R, on greffe simultanément un branchement simple — il est inutile de décrire ce procédé en détail — on obtient une variété à une dimension qui mérite le nom de plume; la droite R est la *tige* sur laquelle sont greffées les *barbes*. Ici les points de branchement forment un ensemble partout dense dans R.

En greffant une barbe en chaque point de R, on obtiendrait une variété à une dimension qui n'est pas à base dénombrable.

EXEMPLE 5. *La plume composée:* Si dans une plume, on remplace chaque barbe par une nouvelle plume, on définit ainsi une variété à une dimension, que nous appellerons *plume double*. Dans une plume double on peut remplacer chaque barbe par une plume simple, obtenant ainsi une plume *triple*; en réitérant ce processus n fois (n entier) on obtient la plume *n-uple*. Rien n'empêche d'effectuer une suite dénombrable de ces opérations pour obtenir la variété à une dimension qui mérite le nom de plume *composée* (ou plume complète). La plume composée possède la propriété remarquable suivante: l'ensemble des points de branchement, qui est dénombrable, est partout dense dans l'espace envisagé.

Ces divers exemples montrent la grande diversité des variétés à une dimension, connexes et à base dénombrable. Une classification topologique de ces espaces paraît déjà assez compliquée.

Donnons encore un exemple qui donnera une faible idée de la complexité des variétés non séparées de dimension > 1. Soient E_1 et E_2 deux exemplaires de l'espace numérique R^2 à deux dimensions rapporté à un système de coordonnées polaires (r, ω). Soit ρ la relation d'équivalence dans l'espace somme Σ de E_1 et E_2 qui identifie tout point de E_1 de coordonnées (r, ω), $r < 1$, avec le point de E_2 de coordonnées $(r, \omega/1 - r)$ et qui se réduit à l'identité pour les autres points. L'espace quotient Σ/ρ est une variété à deux dimensions; l'image dans Σ/ρ de tout point de E_1 de coordonnées $(1, \omega_0)$ n'est séparée d'aucun point de l'image dans Σ/ρ du cercle $r = 1$ de E_2.

1.2. *Variétés à une dimension simplement connexes.*

Rappelons les définitions suivantes:

DÉFINITION 1: *Le couple* $(\tilde{V}, p)$ *formé d'un espace topologique* $\tilde{V}$ *et d'une application continue* p *de* $\tilde{V}$ *sur un espace topologique* V *est appelé un revêtement de* V, *si tout point de* V *possède un voisinage ouvert* U *tel que* $p^{-1}(U)$ *admette une partition en sous-ensembles ouverts* U_i *tels que la restriction de* p *à chacun d'eux soit un homéomorphisme sur* U.

Un espace topologique V sera dit *simplement connexe*, s'il est connexe et si pour tout revêtement connexe $(\tilde{V}, p)$ de V, la projection p est un homéomorphisme de $\tilde{V}$ sur V.

DÉFINITION 2: *Une variété à* n *dimensions* V_n *est dite orientable, s'il existe un atlas* A *de* R^n *sur* V_n *tel que tout changement de cartes associé à deux cartes de* A *soit un homéomorphisme direct (c'est-à-dire qui conserve l'orientation) d'un ouvert de* R^n *sur un ouvert de* R^n.

Les variétés construites dans les exemples 2 et 3 (pour n impair) ne sont pas orientables.

Si une variété V à une dimension peut être étalée dans la droite numérique R, alors V est nécessairement orientable. Par

contre, une variété à une dimension orientable ne peut pas toujours être étalée dans R: il suffit de considérer le cas du cercle. Cependant, il est possible de démontrer la proposition suivante, qui sera utile par la suite.

PROPOSITION 1. *Soit* V *une variété à une dimension simplement connexe et à base dénombrable. Il existe alors une application continue* f *qui étale* V *dans la droite numérique.*

Nous utiliserons dans la démonstration le lemme suivant:

LEMME: *Si une variété* V *à une dimension est simplement connexe, le complémentaire d'un point quelconque* x *de* V *a deux composantes connexes.*

En effet, soit U un voisinage de x homéomorphe à un intervalle; le complémentaire de x dans U a deux composantes connexes U_+ et U_-. Considérons alors deux exemplaires V′ et V″ du complémentaire de x dans V et soient U'_+, U'_- et U''_+, U''_- les correspondants de U_+, U_- dans V′ et V″. Complétons l'espace somme $V' + V''$ par deux points x' et x'' admettant respectivement des voisinages U′ et U″ tel que $U' \cap V' = U'_+$, $U' \cap V'' = U''_-$ et $U'' \cap V' = U'_-$, $U'' \cap V'' = U''_+$; on obtient ainsi un espace V qui, muni de sa projection naturelle p sur V (en particulier $p(x') = p(x'') = x$), est un revêtement à deux feuillets de V. Si le complémentaire de x dans V était connexe, V serait aussi connexe, ce qui est impossible puisque V est simplement connexe.

On peut montrer que réciproquement, si le complémentaire de tout point de V n'est pas connexe, alors V est simplement connexe.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition. Il est possible de trouver une famille dénombrable de cartes h_i ($i = 1, 2, \ldots$) de R dans V dont les buts 0_i recouvrent V. Comme V est connexe, on peut supposer que la numérotation des 0_i est faite de telle façon que $\Omega_n = U_{i=1,2,\ldots,n}\, 0_i$ soit connexe, quel que soit l'entier n. Nous raisonnerons par récurrence. Supposons définie sur Ω_n une application continue f_n qui étale Ω_n dans l'intervalle $]-n, +n[$. Nous allons montrer que f_n peut être prolongée suivant une application f_{n+1} qui étale Ω_{n+1} dans l'intervalle $]-n-1, n+1[$.

Il résulte du lemme que $\Omega_n \cap 0_{n+1}$ est connexe, car si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un point x tel que le complémentaire de x dans V soit connexe. Donc $h_{n+1}^{-1}(\Omega_n \cap 0_{n+1}) = \mathrm{I}$ est un intervalle ouvert de R et l'application $f_n\, h_{n+1}$ est une fonction continue, strictement monotone et inférieure en valeur absolue à n; elle peut être prolongée en une fonction φ continue sur R, strictement monotone et inférieure en valeur absolue à $n+1$. L'application φh^{-1} définie sur 0_{n+1} et l'application f_n coïncident sur $\Omega_n \cap 0_{n+1}$; leur réunion définit le prolongement cherché f_{n+1}.

1.3. *Variétés munies de structures différentiables.*

Définition 1: Une structure différentiable de classe C^r, r étant un entier positif ou ∞ (respectivement une structure analytique), sur une variété à n dimensions V_n est définie par la donnée d'un atlas A de R^n sur V_n tel que, pour tout couple de cartes h_i, $h_j \in A$, le changement de cartes $h_j^{-1}\, h_i$ soit un homéomorphisme r fois continûment différentiable (respectivement analytique) d'un ouvert de R^n dans R^n.

Une *fonction* r-*différentiable sur* V_n est une application f de V_n dans la droite numérique R telle que, pour toute carte $h_i \in A$, l'application fh_i soit une fonction r fois continûment différentiable sur R^n. Une fonction r-différentiable sur V_n est dite de *rang 1* au point $x \in V_n$, si pour une carte h_i dont le but contient x, l'application fh_i est une fonction dont au moins une dérivée partielle au point $h_i^{-1}(x)$ est différente de zéro; cette définition est évidemment indépendante de la carte choisie $h_i \in A$.

On définirait de même la notion d'applications r différentiables d'une variété V_n différentiable de classe C^r dans une variété différentiable V_m de classe C^r.

Une carte f de R^n dans V_n sera dite compatible avec l'atlas A, si pour tout $h \in A$, les changements de cartes $f^{-1}\, h$ et $h^{-1}\, f$ sont des homéomorphismes r-différentiables (ou analytiques) d'ouverts de R^n dans R^n. L'ensemble de toutes les cartes compatibles avec A forme l'atlas maximal $\bar{A}$ engendré par A. Deux sous-atlas de $\bar{A}$ définissent sur V_n la même structure de variété r-différentiable de classe C^r (ou analytique).

PROPRIÉTÉ 1: Le branchement simple (exemple 1 *a)*) [de même que le lasso étranglé] est une variété à une dimension susceptible de deux structures de variétés différentiables de classe C^∞ non isomorphes.

Autrement dit, on peut munir le branchement simple de deux structures différentiables de classe C^∞ telles qu'il n'existe aucun homéomorphisme de classe C^∞ (ainsi que son inverse) de V muni de la première structure sur V muni de la seconde.

En reprenant les notations de l'exemple 1, R_1 et R_2 (identifiés à leurs images dans V) sont deux ouverts formant un recouvrement de V, le point de R_1 (respectivement R_2) d'abscisse t étant désigné par t_1 (respectivement t_2). On peut définir une structure différentiable de classe C^∞ sur V en se donnant deux cartes h_1 et h_2 de R sur R_1 et R_2 telles que $h_1^{-1}\, h_2$ et $h_2^{-1}\, h_1$ soient des homéomorphismes ∞-différentiables de la demi-droite $]-\infty, 0[$.

Première structure: elle est définie par $h_1(t) = t_1$ et $h_2(t) = t_2$.

Deuxième structure: elle est définie par $h_1(t) = t_1$ et $h_2(t) = t_2^3$.

Pour la première structure, la fonction qui au point t_1 ou t_2 prend la valeur t est une fonction ∞-différentiable sur V partout de rang 1. Par contre, pour la deuxième structure, tout fonction ∞-différentiable f sur V est de rang 0 au point $t = 0$. En effet, soient $f_1 = fh_1$ et $f_2 = fh_2$; de $f_1(t) = f_2\, h_2^{-1}\, h_1(t)$ résulte $\left(\frac{d}{dt} f_1(t)\right)_{t=0} = 0$. Cette dernière circonstance établit la propriété 1 [6]. Remarquons que les deux structures définies ci-dessus sont même analytiques.

Il est clair qu'on pourrait multiplier les exemples. On comprendra facilement à partir de l'exemple précédent comment construire une structure différentiable de classe C^∞ sur une plume composée qui mette en évidence la propriété suivante:

---

[6] Dans un article récent [4], Milnor a construit deux structures différentiables non isomorphes sur la sphère S^7. Le résultat de Milnor est global; il s'agit ici au contraire d'une propriété locale, relative à un voisinage arbitraire d'un couple de points non séparés.

PROPRIÉTÉ 2: Il existe des variétés à une dimension (par exemple: la plume composée) susceptibles d'une structure différentiable de classe C^∞ telle que toutes les fonctions continûment différentiables sur ces variétés se réduisent à des constantes.

Les propriétés pathologiques mises en évidence ci-dessus conduisent à une notion de structure différentiable plus stricte pour laquelle les propriétés précédentes ne soient plus valables.

DÉFINITION 2: Une structure différentiable de classe C^r sur une variété V_n est dite *régulière* si pour toute fonction r-différentiable définie sur un voisinage de $x \in V_n$, il existe une fonction r-différentiable f' définie sur V_n telle que f et f' coïncident sur un voisinage de x.

Toute structure différentiable de classe C^r sur une variété *séparée* V_n est régulière. La deuxième structure différentiable définie sur le branchement simple n'est pas régulière.

Nous utiliserons dans la démonstration de la proposition 1 ci-dessous le

LEMME: Soit V une variété munie d'une structure différentiable régulière de classe C^r. Si une fonction r-différentiable f sur V est de rang 1 en un point x de V, elle est également de rang 1 en tout point y non séparé de x.

Pour simplifier les notations, nous démontrerons ce lemme dans le cas où V est une variété à une dimension. Soient h_1 et h_2 deux cartes de R dans V telles que $h_1(0) = x$ et $h_2(0) = y$. L'application $h = h_2^{-1} h_1$ est un homéomorphisme r-différentiable, ainsi que son inverse, d'un ouvert U_1 de R sur un ouvert U_2 de R, l'origine 0 appartenant à l'adhérence de U_1 et U_2; les fonctions $f_1 = fh_1$ et $f_2 = fh_2$ sont r-différentiables dans R et la dérivée $f_1'(0)$ de f_1 à l'origine n'est pas nulle. Soit $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ une suite de points de U_1 tels que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$; en posant $\bar{t}_n = h(t_n)$, on a aussi $\lim_{n\to\infty} \bar{t}_n = 0$. Comme $f_1'(t_n) = f_2'(\bar{t}_n)\, h'(t_n)$ pour tout n, si la $\lim_{n\to\infty} f_2'(\bar{t}_n) = f_2'(0)$ était nulle, alors $\lim_{n\to\infty} h'(t_n)$ serait infinie; mais alors si g est une fonction r-différentiable sur V et de rang 1 en y (une telle fonction existe toujours en vertu de l'hypothèse

de régularité), avec les notations correspondantes, $\lim_{n\to\infty} g_1'(t_n)$ serait infinie, ce qui est impossible. Donc $f_2'(0) \neq 0$.

La proposition 1 de 1.2 peut être précisée de la manière suivante:

PROPOSITION 1: *Sur toute variété à une dimension* V *munie d'une structure différentiable régulière de classe* C^r, *simplement connexe et à base dénombrable, il existe une fonction* r-*différentiable* f *partout de rang 1.*

Autrement dit, la variété V peut être étalée dans R par une application r-différentiable f partout de rang 1.

Nous supposerons connu le lemme suivant:

LEMME: Soit $f(t)$ une fonction r-différentiable définie sur un ouvert I′ de la droite numérique R et dont la dérivée est différente de zéro en tout point d'un intervalle fermé $I < I'$; la restriction de f à I peut se prolonger suivant une fonction r-différentiable sur R et de dérivée non nulle en tout point de R.

Soit A l'atlas de R sur V qui définit la structure différentiable de classe C^r sur V. La marche générale de la démonstration est celle de la proposition 1 de 1.2. Reprenons les mêmes notations en supposant cette fois que chaque 0_i est l'image de l'intervalle I: $]-1, +1[$ par un homéomorphisme h_i qui se prolonge suivant un homéomorphisme $\tilde{h}_i \in A$ de R dans V. On suppose définie sur Ω_n une fonction r-différentiable f_n partout de rang 1 et telle que pour tout 0_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, la fonction $f_n h_i$ qui est définie sur I se prolonge suivant une fonction r-différentiable sur R partout de rang 1. On va montrer que f_n peut se prolonger suivant une fonction r-différentiable f_{n+1} sur Ω_{n+1} jouissant des mêmes propriétés.

Comme $\Omega_n \cap 0_{n+1}$ est connexe, $f_n h_{n+1}$ est une fonction r-différentiable sur un intervalle $]t_0, t_1[$ contenu dans I et à dérivée non nulle. Les ensembles $h_{n+1}^{-1}(0_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont des intervalles ouverts qui recouvrent $]t_0, t_1[$; soit 0_k un ouvert tel que $h_{n+1}^{-1}(0_k)$ soit un intervalle de la forme $]t_0, t_2[$, $(t_2 \leqslant t_1)$. Par l'hypothèse de récurrence, la fonction $f_n h_k$ se prolonge sur R suivant une fonction $\hat{f}_k$ partout de rang 1. Soit t_0' le point de

l'intervalle $[-1, +1]$ défini par $t_0' = \lim_{t \to t_0} h_k^{-1} h_{n+1}(t)$ et soit $x' = \tilde{h}_k(t_0')$; le point $x = \tilde{h}_{n+1}(t_0)$ n'est pas séparé de x'. Il existe une fonction r-différentiable g dans V qui coïncide avec $\hat{f}_k \tilde{h}_k^{-1}$ sur un voisinage de x'; comme g est de rang 1 en x', elle l'est également en x (lemme 1). La fonction qui est égale à gh_{n+1} sur l'intervalle $]-\infty, t_0]$ et à $f_n h_{n+1}$ sur $]t_0\, t_1[$ est r-différentiable sur $]-\infty, t_1[$ car les deux fonctions $g\tilde{h}_{n+1}$ et $f_n h_{n+1}$ coïncident dans un intervalle $]t_0, t_2'[$. En répétant la même construction pour t_1, on obtient une fonction définie sur R de rang 1 sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ et dont la restriction à $]t_0, t_1[$ coïncide avec $f_n h_{n+1}$; d'après le lemme 2, il existe une fonction r-différentiable $\hat{f}_{n+1}$ qui prolonge $f_n h_{n+1}$ et qui est partout de rang 1. La fonction f_{n+1} cherchée est égale à f_n sur Ω_n et à $\hat{f}_{n+1} h_{n+1}^{-1}$ sur 0_n.

Corollaire: Toutes les structures différentiables sur la droite numérique R sont équivalentes.

Soit R la droite numérique munie de sa structure différentiable ordinaire et R′ la droite numérique munie d'une structure différentiable de classe C^r. D'après la proposition, il existe une application r-différentiable partout de rang 1 de R′ sur R (en faisant au besoin une homothétie convenable). Comme cette application est biunivoque, c'est un isomorphisme de classe C^r de R′ sur R (muni de sa structure différentiable ordinaire de classe C^r).

2. Les structures feuilletées du plan.

2.1. *Rappel de définitions et de propriétés classiques.*

Définition 1: *Une structure feuilletée* (F) *sur une variété à deux dimensions* V_2 *est définie par un atlas* A *de* R^2 *sur* V_2 *tel que si* h_i *et* h_j *sont deux cartes quelconques de* A, *le changement de cartes* $h_{ji} = h_j^{-1} h_i$ *est un homéomorphisme d'un ouvert* U_{ji} *de* R^2 *sur un ouvert de* R^2 *qui, au voisinage de tout point de* U_{ji} *s'exprime par des équations de la forme:*

$$x' = g_{ji}(x, y) \qquad y' = k_{ji}(y) \; . \tag{1}$$