Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1957)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN EXEMPLE DE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE
Autor: de Rham, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33737

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR UN EXEMPLE DE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

PAR

G. DE RHAM, Lausanne

Soit $[y]$ le plus grand entier ne dépassant pas y et $\varphi(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|$ la différence prise en valeur absolue entre x et l'entier le plus voisin de x. *La fonction*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \varphi(2^k x)$$

est continue et n'admet de dérivée pour aucune valeur de x.

La continuité résulte immédiatement de ce que $f(x)$ est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. L'inexistence de la dérivée peut aussi s'établir très simplement. Pour cela, partons de la remarque que si $f(x)$ était dérivable pour $x = x_0$, sa pente moyenne

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

dans un intervalle (x_1, x_2) contenant x_0 tendrait vers une limite, égale précisément à $f'(x_0)$, lorsque la longueur de cet intervalle tend vers zéro. En particulier, la pente moyenne r_n de $f(x)$ dans l'intervalle $i_n = (2^{-n}[2^n x_0],\ 2^{-n}[2^n x_0] + 2^{-n})$ devrait tendre vers une limite pour $n \to \infty$. Or cela est impossible. En effet, la fonction $2^{-k} \varphi(2^k x)$ étant linéaire dans i_{k+1} avec une pente égale à ± 1 et s'annulant aux extrémités de i_n pour $n \leqslant k$, sa pente moyenne dans i_n est nulle pour $n \leqslant k$ et a toujours la même valeur ± 1 pour $n > k$; par suite, la différence de ses pentes moyennes dans i_{n+1} et dans i_n est nulle pour $k \neq n$ et vaut ± 1

pour $k = n$; cela entraîne immédiatement $r_{n+1} - r_n = \pm 1$, ce qui montre que r_n ne peut tendre vers une limite. C.Q.F.D.

Le même raisonnement montre que, si a est un entier positif pair,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \varphi(a^k x)$$

est une fonction continue sans dérivée. Pour $a = 10$, c'est l'exemple introduit par M. B. L. VAN DER WAERDEN [*Math. Zeitschr.*, 32 (1930), 474-475], qui prouve sa non dérivabilité par un raisonnement également très simple, dû à M. HEYTING, mais qui ne convient pas pour $a = 2$.

Cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(x) - a^{-1} f(ax) = \varphi(x)$$

dont elle est l'unique solution bornée. Il est intéressant de considérer plus généralement l'équation

$$F(x) - b F(ax) = g(x) ,$$

où $g(x)$ est une fonction donnée, a et b des constantes. Pour $0 < b < 1$, elle a une solution bornée, et une seule, qu'on obtient par la méthode d'itération,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k g(a^k x) .$$

Cette fonction est évidemment continue si $g(x)$ est continue. Pour $g(x) = \cos x$, a entier impair et $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, on sait qu'elle n'a pas de dérivée: c'est l'exemple de WEIERSTRASS (voir par exemple GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, I, 73-75); mais la démonstration n'est pas aussi simple que pour $f(x)$.

Reçu le 23 novembre 1956.