Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Nachruf: GEORGES VALIRON (1884-1954)
Autor: Milloux, H.

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

GEORGES VALIRON

(1884-1954)

PAR

H. MILLOUX, Bordeaux

Au cours du mois de mars 1955, l'Université française et le monde des mathématiciens, qui venaient tout juste de déplorer la mort de Jean Chazy, apprenaient avec une grande tristesse que Georges Valiron n'était plus. L'affection dont il souffrait depuis plus d'un an le condamnait de façon certaine. Les soins admirables prodigués par sa famille n'ont pu qu'adoucir et retarder une échéance fatale. Au cours de ce long calvaire, Georges Valiron n'a cessé d'étonner ses proches et ses amis par la vivacité de sa belle intelligence, restée intacte, et par son ardent désir de reprendre ses travaux interrompus. Mais la maladie progressait implacablement, de mois en mois; elle l'a emporté au moment où il allait achever sa carrière d'universitaire, une carrière exemplaire où l'on peut puiser la plus belle des leçons morales et sociales: esprit fin, libéral, distingué, Georges Valiron a voué exclusivement sa vie à la famille, au travail de recherche et à l'enseignement.

Né à Lyon en 1884, il fit ses études secondaires dans sa ville natale. Puis, il entra à l'Ecole normale supérieure, et fut reçu premier au concours de l'Agrégation des sciences mathématiques en 1908. Il exerça ensuite pendant quatre ans dans l'enseignement secondaire, notamment à Besançon, où il eut parmi ses élèves André Bloch. Boursier Commercy en 1912-1914, il passa sa thèse à la Faculté des sciences de Paris en juin 1914. Mobilisé peu après, il termina la guerre comme

sous-lieutenant d'artillerie. Revenu à la vie civile en 1919, il fit partie du groupe de personnalités éminentes qui furent envoyées à l'Université de Strasbourg. Il y enseigna jusqu'en 1931, puis la Faculté des sciences de Paris l'attira à elle. Depuis 1941, il occupait la chaire de calcul différentiel et intégral. En même temps, il enseignait à l'Ecole polytechnique.

Honoré par cinq prix de l'Académie des sciences, dont le Grand prix des sciences mathématiques en 1931, il reçut la cravate de Commandeur de la Légion d'Honneur en 1954. La réputation mondiale incontestée de Georges Valiron lui valut à de multiples reprises, des invitations à faire des cours ou des conférences à l'étranger: en Angleterre, en Belgique, en Suisse, aux Etats-Unis, en Amérique du Sud, en Egypte. Partout, les contacts avec les mathématiciens étrangers furent fructueux. Pour ne citer qu'un exemple, rappelons que c'est M. Collinwood, dont on connaît les beaux travaux et leur parenté avec ceux de G. Valiron, qui en 1922, alors jeune mathématicien sorti de Cambridge, seconda G. Valiron en acceptant de tenir le rôle de traducteur, et en donnant des compléments.

Après ce bref aperçu sur la carrière de G. Valiron, l'entreprise de résumer son œuvre immense apparaît redoutable: il n'est possible que d'insister sur les résultats fondamentaux extraits de plus de 200 mémoires, articles ou notes. La théorie des fonctions entières, holomorphes ou méromorphes, qu'il a surtout travaillé, lui doit d'avoir fait des progrès énormes.

Une partie de ses premiers travaux est consacrée aux fonctions entières d'ordre nul. Il y précise la notion d'ordre et y introduit la notion de fonctions à correspondance régulière, pour lesquelles $\log M(r, f)$ est approximativement égal à une fonction simple de r; ces fonctions forment des classes assez souples pour permettre l'approximation de toutes les autres fonctions d'ordre nul. Il démontre d'autre part, que pour une classe de fonctions à croissance lente, $\log |f(z)|$ est asymptotiquement égal à $\log M(r, f)$, exception faite de certaines régions, relativement petites, entourant les zéros: ce résultat particulier peut être considéré comme une amorce au théorème général de G. Julia. D'autres fonctions d'ordre nul restent bornées dans des cercles qui ne sont pas vus de l'origine sous des angles très

petits. Pour ces fonctions, G. Valiron localise cependant les zéros de $f(z) - Z$. Certains de ces résultats sont étendus aux algébroïdes. Les fonctions entières d'ordre nul se présentent naturellement dans certaines théories; citons les fonctions loxodromiques, et certaines équations fonctionnelles. Elles permettent d'autre part, comme l'a montré G. Valiron, de construire des exemples de surfaces de Riemann présentant certaines complications.

Dans l'étude des fonctions entières d'ordre fini, il a introduit la notion d'ordre précisé, et a complété des résultats donnés notamment par Wiman, Lindelöf, Leau. Pour toute une classe de ces fonctions, une valeur asymptotique de la fonction est ainsi obtenue, qui permet d'étendre la théorie de Phragmén et Lindelöf sur les indicatrices de croissance. Le théorème de Wiman est démontré sous une forme bien plus précise pour les fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$. Une réciproque, se rattachant à la théorie des théorèmes taubériens, a été retrouvée ultérieurement par Hardy et Titchmarsch, dans un cas plus particulier.

La notion d'ordre précisé a permis également à son initiateur une étude plus serrée de la relation entre $M(r, f)$ et les indices $n(r, a)$ relatifs aux points où la fonction prend la valeur a, lorsque l'ordre de cette fonction n'est pas entier. Une étude ultérieure, inspirée de la méthode employée par Borel dans sa démonstration élémentaire du théorème de Picard, apporte un progrès décisif dans la recherche de la distribution des modules des points où la fonction prend une valeur donnée a, et conduit à une définition précise de la notion de valeur exceptionnelle. Plus tard, lorsque R. Nevanlinna eut introduit sa fonction caractéristique $T(r, f)$, qui utilise l'indice $N(r, f)$ introduit précédemment par G. Valiron, celui-ci put revenir sur ses résultats antérieurs et les étendre aux fonctions méromorphes, puis aux fonctions algébroïdes.

Pour être complet, il faudrait aussi signaler les travaux de G. Valiron sur le genre des fonctions entières (par exemple: comparaison du genre d'une fonction et du genre de la dérivée), les zéros multiples, les fonctions inverses des fonctions entières etc. On lui doit en particulier une belle démonstration, très simple et pouvant figurer dans les cours de licence, du fait que

toute fonction entière admet l'infini comme valeur asymptotique (Iversen).

Les débuts de la théorie du recouvrement trouvent leur place dans les travaux de G. Valiron. Utilisant des résultats de comparaison entre $f(z)$ et $f(z')$ lorsque z et z' sont suffisamment voisins, résultats qui par ailleurs lui donnent une démonstration directe du théoréme de Picard, il démontre que la surface de Riemann décrite par $Z = f(z)$ fonction entière, contient des cercles simples de rayon arbitrairement grand. C'est ensuite qu'André Bloch, améliorant la méthode de son ancien maître, donne son théorème bien connu, dont la démonstration a été merveilleusement simplifiée à la suite des efforts conjugués de Landau et de G. Valiron. Ce théorème, aux conséquences remarquables, dont plusieurs sont dues à G. Valiron, a été étendu par celui-ci aux algébroïdes.

Parmi les plus beaux résultats qu'il a obtenus, figurent certainement ceux qui sont relatifs à la théorie des cercles de remplissage. G. Valiron s'est intéressé à cette théorie dès que j'eus défini ces cercles, et démontré leur existence pour les fonctions entières et les fonctions méromorphes à valeur asymptotique dans ma thèse (1924). Les puissants moyens fournis en 1925 par R. Nevanlinna avec sa fonction caractéristique et son inégalité fondamentale permirent alors à G. Valiron de donner des précisions remarquables sur la position des cercles de remplissage, leurs rayons, et les valeurs prises par la fonction dans ces cercles. De ces précisions, résulte l'existence de directions au voisinage desquelles le théorème de Borel est vérifié pour toute fonction méromorphe d'ordre positif. Ces directions jouent en effet, par rapport à ce théorème, exactement le même rôle que les directions de Julia jouent par rapport au théorème de Picard. G. Valiron a proposé modestement de les appeler directions de Borel; tout en respectant cette proposition, je crois qu'il convient de les appeler, comme je l'ai suggéré, les directions de Borel-Valiron. La technique d'étude des cercles de remplissage a fait un progrès décisif ensuite grâce à l'utilisation du joli théorème de Henri Cartan, sur la limitation des régions du plan où un polynome est très petit. G. Valiron a vu l'intérêt de cette utilisation, qui, entre autres, m'a permis d'étendre la théorie des

cercles de remplissage à toutes les fonctions méromorphes, sauf celles de la classe d'Ostrowski, pour lesquelles on sait à l'avance qu'il y a impossibilité.

La technique nouvelle conduisait à une revision générale d'une partie importante de la théorie des fonctions méromorphes, puis des fonctions algébroïdes. G. Valiron est ainsi amené à définir ce qu'il appelle points de Borel, et à en démontrer l'existence, pour des fonctions méromorphes dans un cercle, formant une classe très étendue. Précédemment, il avait montré qu'il y a lieu de faire la distinction entre courbes de Picard et courbes de Julia, pour les fonctions méromorphes dans le plan, en fournissant de curieux exemples justifiant cette distinction. Il étend cette distinction au cas des fonctions méromorphes dans un cercle. Puis il compare les directions de Borel-Valiron des fonctions entières et de leurs dérivées, question difficile qui n'est pas encore entièrement résolue. L'introduction de l'ordre divergent dans l'étude de ces directions lui fournit, par ailleurs, toute une série de propositions analogues à celles qui interviennent dans la théorie de Phragmén et de Lindelöf. Fructueuses aussi s'avèrent ses introductions de l'ordre réel, de l'ordre moyen, de l'ordre apparent dans cette étude, et ses apports multiples dans la recherche des relations entre les directions de Borel-Valiron et les singularités d'une série entière convenablement associée à la fonction entière étudiée.

Une partie des travaux précédents utilisait ou était en relations étroites avec la théorie des familles normales de fonctions analytiques, de M. P. Montel. Mais, G. Valiron a donné d'autres apports à cette théorie, ainsi qu'à la théorie voisine des familles quasi-normales, en obtenant de nouveaux critères ou en précisant d'anciens, et en donnant des extensions, notamment dans le sens des théorèmes de Schottky et de Julia, aux familles de fonctions algébroïdes. On sait d'autre part que M. P. Montel pressentait qu'une famille de fonctions holomorphes dans un domaine, ne s'y annulant pas, et dont les dérivées d'un ordre donné ne prennent pas la valeur 1, forme une famille normale. Après un résultat essentiel de M. F. Bureau sur la question, c'est M. Miranda qui démontra le critère, en complétant les études de F. Bureau. G. Valiron, reprenant la question, obtint un grand

nombre de propositions nouvelles et de critères, en utilisant à la fois les méthodes de M. Montel et la technique due à M. R. Nevanlinna.

On doit à G. Valiron une étude, faite partiellement en collaboration avec Landau, des fonctions holomorphes à partie réelle positive lorsque la partie réelle de la variable est positive, ainsi que des applications à la représentation conforme et au problème de la dérivée angulaire. Il s'est aussi intéressé activement à la théorie de l'itération, et a découvert notamment des propriétés nouvelles de la fonction de Kœnigs.

Le problème de l'uniformisation, lorsqu'il s'agit d'une courbe du genre 0, lui doit un résultat décisif, qui trouve son application dans la théorie des équations différentielles. Le problème redoutable de l'application d'une surface de Riemann simplement connexe sur un cercle (cas hyperbolique) lui doit également une contribution importante, grâce à la considération de certaines fonctions holomorphes dans un cercle, non bornées mais restant bornées sur des courbes asymptotes.

Les méthodes de sommation, soit par les moyennes introduites par Hardy et Littlewood, soit par les procédés de Borel et Mittag-Leffler, ont attiré son attention. Ses recherches dans ce domaine l'ont conduit à de nombreux résultats, de même que dans le problème voisin, qui consiste à étudier les modifications des propriétés subies par une fonction entière simple lorsque l'on multiplie les coefficients de son développement en série entière par des facteurs de certaines suites. A partir de la fonction exponentielle, de remarquables exemples de dispersion des directions de Borel en résultent, ainsi, corrélativement, que des exemples de séries entières admettant le cercle de convergence comme coupure.

Dans la théorie des séries de Dirichlet, il a complété des résultats dûs à Bohr, à Cahen, à Amira et montré que les propriétés des séries ordinaires s'étendent à des séries de Dirichlet mixtes. Il a étendu, également les résultats obtenus par Ritt sur certaines classes d'équations différentielles d'ordre infini.

L'interpolation d'une fonction entière dont on connaît les valeurs en une suite de points tendant vers l'infini lui a fourni

des possibilités de représentation. Il a montré que dans certains cas, une telle fonction est bien déterminée.

On sait (Hadamard) que la fonction log M (r) est une fonction convexe de log r. G. Valiron a étendu cette propriété au cas du module d'une fonction de deux variables, et en a donné des applications aux fonctions entières de deux variables. Les propriétés des fonctions convexes ou sous-harmoniques ont été également étudiées par lui dans le cas de deux variables; pour une variable, il a rattaché à la convexité des propriétés de l'indicatrice de Phragmén et Lindelöf.

On lui doit aussi quelques travaux de géométrie. D'autre part, l'énorme activité de G. Valiron dans la recherche ne l'a cependant pas empêché de s'intéresser, très activement aussi, à l'enseignement. On lui doit, entre autres, un magnifique cours d'analyse mathématique, d'une précision remarquable, et d'un caractère classique. Les bons étudiants de licence, surtout ceux qui s'intéressent à l'analyse, y trouveront notamment l'amorce de nombreuses théories récentes.

Mais c'est avant tout à la théorie des fonctions analytiques que G. Valiron a consacré sa vie de savant. Sa vive intelligence et la vaste étendue de ses connaissances, jointes à une puissance exceptionnelle de travail, lui ont fait acquérir des résultats fondamentaux et nombreux dans des domaines très divers. L'influence de ces résultats est considérable. En particulier, il n'est pas d'analyste qui n'ait eu à s'appuyer, dans ces quarante dernières années, sur les travaux de ce maître.

Curiosité sans cesse en éveil de l'esprit, vaste culture, goût du travail précis et achevé, merveilleuse intelligence mise avec passion au service de la science pure et désintéressée, voilà les qualités de celui dont nous déplorons le départ au soir d'une carrière qui doit rester un modèle.